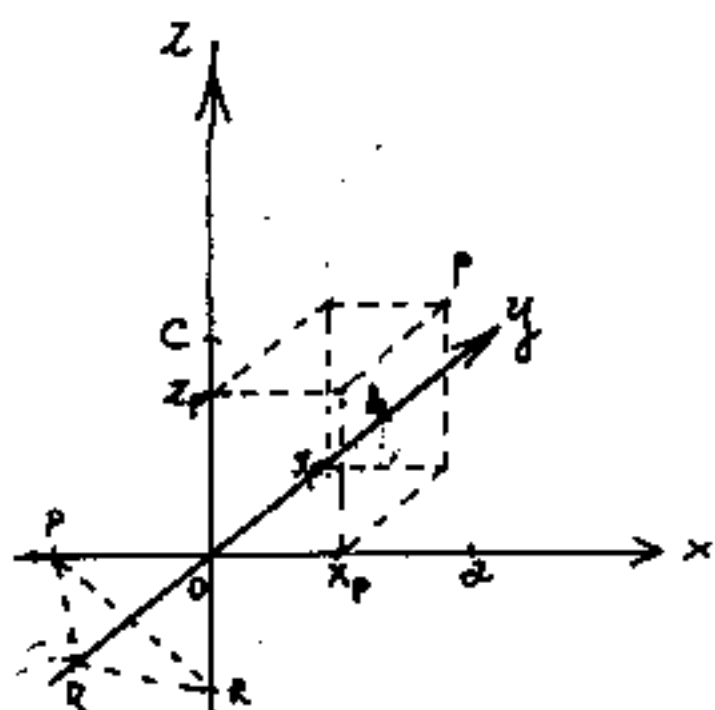


3/ campo tridimensionale



Dato il sistema di tre assi cartesiani ortogonali $oxyz$ per i quali la rappresentazione di un punto P , secondo le sue coordinate è scritta:

$$P \equiv (x_P; y_P; z_P)$$

vorremmo analizzare il significato delle espressioni:

$x = a$ significa: "tutti i punti aventi ascissa pari ad a " cioè il piano parallelo ad yz e distante " a " da esso. Analogamente:

$y = b$ = piano parallelo ad xz e distante " b " da esso.

$z = c$ = piano parallelo ad xy e distante " c " da esso.

Cioè dire: "direzione x " significa dire: "giacitura x " di tutti i piani perpendicolari ad x .

Ciò vale per x , per y , z , n ed ogni altra direzione verso il nostro pseudo-punto all'infinito.

$y = mx$ per ($z=0$) = retta sul piano xy , traccia⁽¹⁾ su xy del piano passante per x , costituito

(1) Dicesi "traccia" l'intersezione di un piano (o di una retta) con i piani di proiezione.

dalle infinite rette parallele alla: $y = mx$; $z = 0$ determinate dal solo variare di z . (Si noti che per determinare una retta occorrono due relazioni, cioè l'intersezione di due piani, il piano: $z = 0$, ed il piano ($y = mx$). Analogamente:

$x = mz$ per ($y = 0$) = retta sul piano xz , traccia del piano per y .

$z = my$ per ($x = 0$) = retta sul piano yz , traccia del piano per x .

Analogamente le forme:

$$y = mx + q$$

$$x = mz + p$$

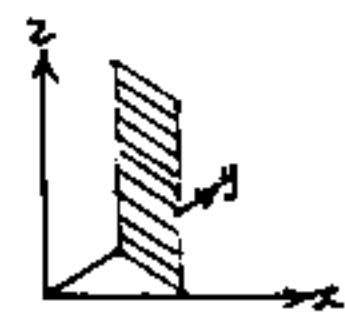
$$z = my + r$$

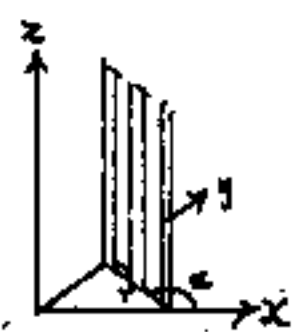
Sono le rette, tracce dei piani paralleli all'asse che non figura in formula. Cioè rispettivamente paralleli a z, y, x . Cioè: se l'equazione di un piano è indipendente da un asse, il piano è parallelo a quell'asse.

(o passa per quell'asse se è nullo il termine noto)

Notare, in questi casi, il piano come superficie rigata. Per esempio: $y = mx + q$ è un piano parallelo a z che può essere riguardato come l'insieme

delle rette: $\begin{cases} y = mx + q \\ z = K \end{cases}$ con: $-\infty \leq K \leq +\infty$





Ma può anche essere riguardato come l'insieme delle rette parallele a z e di traccia τ , tali che: $y_{\tau} = mx_{\tau} + q$ con: $-\infty \leq x_{\tau} \leq +\infty$

L'equazione di queste rette può esprimersi per intersezione fra i piani:
$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = nx \end{cases}$$

con n variabile da m ad. $\tan[\arctan(m) + 180]$; oppure per intersezione fra i piani (ortogonali)
$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = -\frac{1}{m}x + q_1 \end{cases} \quad \text{con: } -\infty \leq q, q_1 \leq +\infty$$

Notare che il coefficiente $m = \tan(\alpha)$, ove α è l'angolo che la traccia su xy del piano $y = mx + q$ forma con l'asse delle x , e anche l'angolo diedro fra il piano $y = mx + q$ ed il piano xz .

Consideriamo ora l'espressione lineare completa:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{equazione} \\ \text{del piano} \end{array} \right)$$

Per trovare l'equazione delle tracce rispettivamente sui piani: xy , xz , yz ; basta porre $z=0$, oppure: $y=0$, oppure: $x=0$. Avremo:

su (xy) : $\boxed{ax + by + d = 0}$; ($z=0$); cioè: $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x - \frac{d}{b}$

su (xz) : $\boxed{ax + cz + d = 0}$; ($y=0$); cioè: $x = \left(-\frac{c}{a}\right)z - \left(\frac{d}{a}\right)$

su (zy) : $\boxed{by + cz + d = 0}$; ($x=0$); cioè: $z = \left(-\frac{b}{c}\right)y - \frac{d}{c}$

I coefficienti di traslazione lineare:

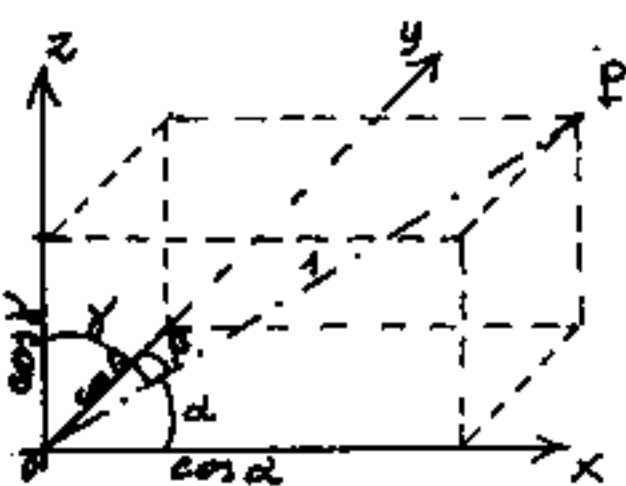
$(-\frac{d}{a})$; $(-\frac{d}{b})$; $(-\frac{d}{c})$; sono le distanze dall'origine "o" degli assi, dei punti di intersezione del piano, con gli assi stessi. (Elementi sufficienti per determinare univocamente il piano, e disegnarlo)

Siano: $\overline{OP} = (-\frac{d}{a})$ la distanza sull'asse x

$\overline{OQ} = (-\frac{d}{b})$ " " " y

$\overline{OR} = (-\frac{d}{c})$ " " " z

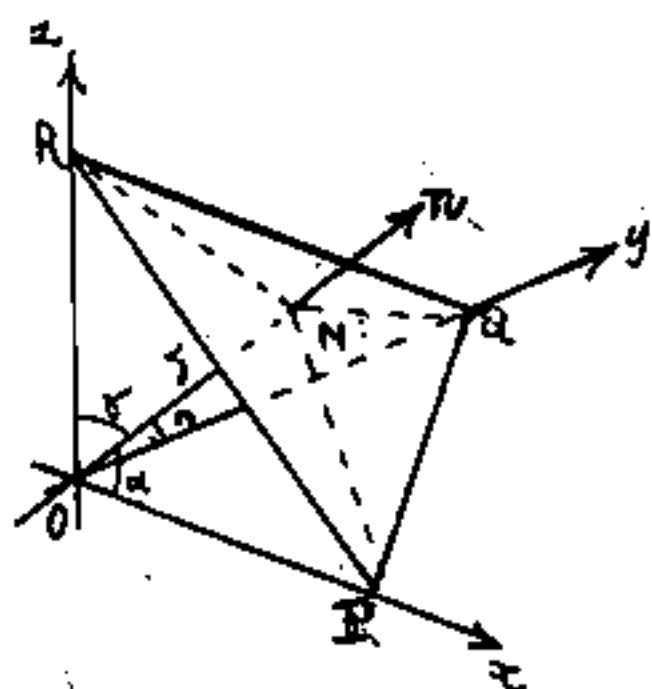
Indichiamo con δ la distanza del piano dall'origine "o" degli assi. La retta contenente il segmento δ , essendo perpendicolare al piano, è anche retta di giacitura del piano. Diconsi: Coseni direttori, i coseni degli angoli che una retta orientata forma con gli assi. Avremo cioè che, se consideria-



mo un parallelepipedo trirettangolo con diagonale $\overline{OP} = 1$ unitaria, i tre spigoli sono i coseni degli angoli da essi

formati con la diagonale. Perciò, per il teorema di Pitagora, "La somma dei quadrati dei coseni direttori è sempre uno" ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$)

Nel nostro caso abbiamo: (essendo: $\hat{R}\hat{N}\hat{O} = \hat{Q}\hat{N}\hat{O} = \hat{P}\hat{N}\hat{O} = \pi/2$)



$$\cos(\hat{x}\hat{n}) = \delta/\overline{OP} = -\delta a/d = \left(-\frac{\delta}{d}\right)a$$

$$\cos(\hat{y}\hat{n}) = \delta/\overline{OQ} = -\delta b/d = \left(-\frac{\delta}{d}\right)b$$

$$\cos(\hat{z}\hat{n}) = \delta/\overline{OR} = -\delta c/d = \left(-\frac{\delta}{d}\right)c$$

$$\left(-\frac{\delta}{d}\right)^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

per cui:

$$\boxed{\delta = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} = \overline{ON}$$

Importantissimo notare che: a, b, c , sono proporzionali ai coseni direttori, e che sostituendo il valore di δ abbiamo:

$$\cos(\hat{x}\hat{n}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos(\hat{y}\hat{n}) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos(\hat{z}\hat{n}) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

cioè se dividiamo per $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ l'espressione:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

otteniamo:

$$\boxed{(\cos(\hat{x}\hat{n}))x + (\cos(\hat{y}\hat{n}))y + (\cos(\hat{z}\hat{n}))z = \delta} = \overline{ON}$$

ove δ è la distanza del piano dall'origine degli assi. Se a, b, c , fossero già i coseni direttori della retta normale al piano (retta di giacitura di tutti i piani paralleli oltreché del piano dato); $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ sarebbe uguale ad uno (somma dei quadrati dei coseni direttori) e quindi non varierebbero dividendo per l'unità.

Condizione di parallelismo fra piani è che abbiano gli stessi coseni direttori; varia solo la distanza δ del piano dall'origine degli assi.

L'equazione di una retta è data da due relazioni lineari, cioè come intersezione di due piani.

Quindi nello spazio tridimensionale, espressioni del tipo: $z = f(x, y)$, cioè funzioni in due variabili, rappresentano in generale una superficie, che sarà piana solo se $z = f(x, y)$ è una relazione lineare.

Due espressioni: $z_1 = f(x, y)$; $z_2 = f(x, y)$, riferite agli stessi assi x, y, z , rappresentano la linea intersezione delle due superfici, che potrà risultare curva o rettilinea, piana o gobba a seconda della specie delle due espressioni.

Tre espressioni rappresentano un punto. Per esempio i tre piani:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

da cui è possibile calcolare le coordinate del punto comune.

Vale il principio di dualità scambiando la parola punto con la parola piano e viceversa.
(STAUDT)

due $\begin{cases} \text{piani} \\ \text{punti} \end{cases}$ determinano una retta

tre $\begin{cases} \text{piani} \\ \text{punti} \end{cases}$ determinano un $\begin{cases} \text{punto} \\ \text{piano} \end{cases}$

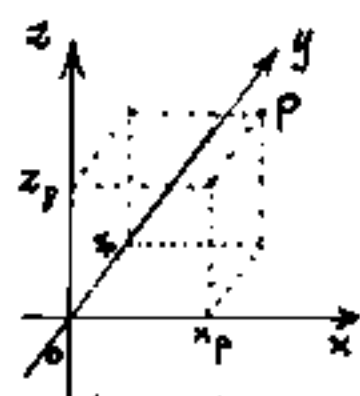
un $\begin{cases} \text{piano} \\ \text{punto} \end{cases}$ (ed una retta non coincidente) determinano un $\begin{cases} \text{punto} \\ \text{piano} \end{cases}$

due rette incidenti determinano $\begin{cases} \text{punto} \\ \text{piano} \end{cases}$

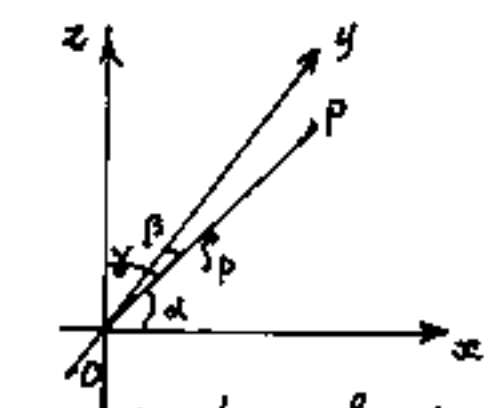
quest'ultima è l'inversa della prima scambiando la parola retta con le parole punto o piano.

La geometria analitica dello spazio

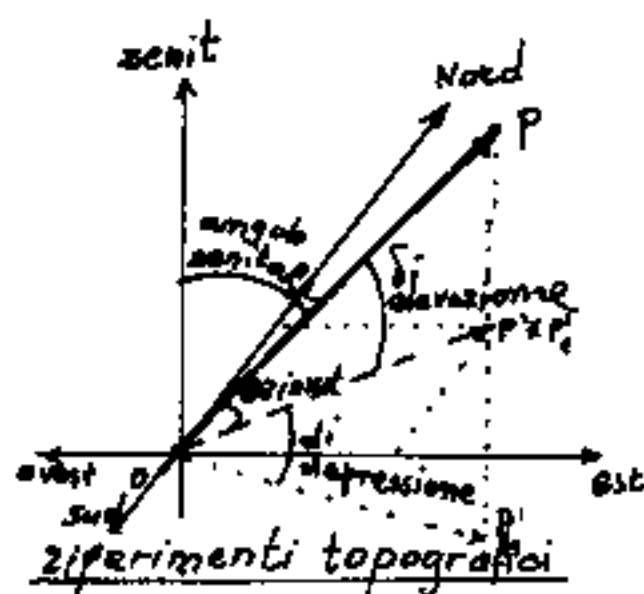
Un punto, nello spazio tridimensionale, risulta definito se si hanno tre determinazioni; per esempio: $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$ (le tre coordinate cartesiane); oppure: $P \equiv (\rho, \alpha, \beta)$, (ove $\rho = \overline{OP}$, ed α e β angoli formati da $\overline{OP}$ rispetto a direzioni arbitrariamente convenute e prefissate): se α e β sono relativi a due assi cartesiani x, y si hanno le coordinate polari; se α è relativo ad una direzione orizzontale e giace su un piano orizzontale, α è detto: "angolo azimutale" o semplicemente: "azimut". (Per esempio sulla terra gli angoli orizzontali misurati rispetto alla direzione Nord). β invece può essere misurato rispetto al piano orizzontale e quindi β è detto angolo di elevazione o di depressione secondo che mira a quote più alte o più basse del piano di riferimento. Se invece β ha per origine la verticale opposta al filo a piombo, è detto angolo zenitale in quanto la direzione origine è lo zenit. Questi sono riferimenti topografici e gli angoli α e β sono in genere misurati con uno strumento detto: Teodolite.



coordinate cartesiane



coordinate polari



riferimenti topografici

Un punto, nello spazio tridimensionale, può anche essere determinato dalle tre equazioni di tre piani non appartenenti allo stesso fascio. (Si dice "fascio di piani" l'insieme dei piani aventi in comune la stessa retta). (Si dice: "stella di piani", l'insieme dei piani aventi in comune lo stesso punto)

Una retta, nello spazio tridimensionale, risulta definita se si hanno due determinazioni; per esempio le due equazioni di due piani non paralleli:

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}$$

ove: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Oppure sono date le coordinate di due punti:

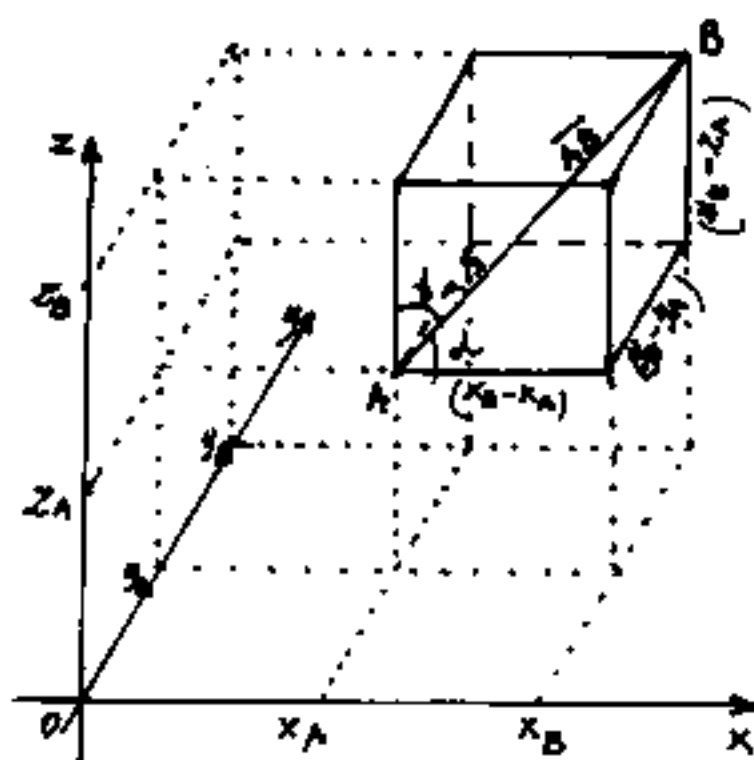
$A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$, appartenenti alla retta. In questo caso si può scrivere una doppia uguaglianza, chiamata: "equazione canonica della retta".

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Questa doppia uguaglianza resta valida se la moltiplichiamo o dividiamo per costanti arbitrarie: per esempio se per costante moltiplicatore prendiamo il segmento $\overline{AB}$, avremo:

$$\frac{(x - x_A)}{\left(\frac{x_B - x_A}{\overline{AB}}\right)} = \frac{(y - y_A)}{\left(\frac{y_B - y_A}{\overline{AB}}\right)} = \frac{(z - z_A)}{\left(\frac{z_B - z_A}{\overline{AB}}\right)}$$

ma: $\left(\frac{(x_B - x_A)}{AB}\right) = \cos(\alpha) ; \left(\frac{(y_B - y_A)}{AB}\right) = \cos(\beta) ; \left(\frac{(z_B - z_A)}{AB}\right) = \cos(\gamma) ;$



cioè i denominatori della doppia uguaglianza diventano i coseni direttori della retta; e poiché: $\alpha = \widehat{xz}$
 $\beta = \widehat{yz}$; $\gamma = \widehat{zx}$ l'equazione canonica può scriversi:

$$\frac{(x - x_A)}{\cos(\widehat{xz})} = \frac{(y - y_A)}{\cos(\widehat{yz})} = \frac{(z - z_A)}{\cos(\widehat{zx})}$$

A priori però non possiamo sapere per quale costante arbitraria è stata moltiplicata o divisa la doppia uguaglianza, perciò considerate tre grandezze: l, m, n proporzionali a $(x_B - x_A); (y_B - y_A); (z_B - z_A)$, cioè proporzionali ai coseni direttori: $\cos(\widehat{xz}) ; \cos(\widehat{yz}) ; \cos(\widehat{zx})$, avremo l'equazione generica della stella di rette passanti per A

$$\frac{x - x_A}{l} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$$

Consideriamo: $l^2 = K^2 \cos^2 \alpha ; m^2 = K^2 \cos^2 \beta ; n^2 = K^2 \cos^2 \gamma$; sappiamo che: $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)$ perciò: $(l^2 + m^2 + n^2) = K^2$, per cui basterà dividere i denominatori dell'espressione per $\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}$, per ottenere ai denominatori i rispettivi coseni direttori. I tre termini della doppia uguaglianza possono considerarsi due a due, avremo così tre equa-

zioni di tre piani, ove in ciascuna equazione manca una coordinata, perciò i tre piani sono ciascuno parallelo o passante per un asse, oltreché contenere la retta.

$$\cos(\alpha) = \cos(\widehat{xAB}) = \cos(\widehat{x\ell}) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\cos(\beta) = \cos(\widehat{yAB}) = \cos(\widehat{y\ell}) = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\cos(\gamma) = \cos(\widehat{zAB}) = \cos(\widehat{z\ell}) = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Quindi le equazioni dei tre piani sono

$$\frac{x - x_A}{\cos(\widehat{x\ell})} = \frac{y - y_A}{\cos(\widehat{y\ell})} \quad (\text{parallelo a } z)$$

$$\frac{x - x_A}{\cos(\widehat{x\ell})} = \frac{z - z_A}{\cos(\widehat{z\ell})} \quad (\text{parallelo ad } y)$$

$$\frac{y - y_A}{\cos(\widehat{y\ell})} = \frac{z - z_A}{\cos(\widehat{z\ell})} \quad (\text{parallelo ad } x)$$

Ma, conoscendo i coseni direttori della retta, possiamo scrivere l'equazione della giacitura di piani ad essa perpendicolari:

$$\boxed{(\cos\alpha)(x) + (\cos\beta)(y) + (\cos\gamma)(z) + \delta = 0}$$

ove ogni piano è individuato dal parametro δ che rappresenta la distanza del piano dall'origine degli assi. Ponendo invece, nella doppia uguaglianza, $x=0$, oppure $y=0$, oppure $z=0$ si trovano le coordinate dei punti di intersezione

della retta coi piani: yz , zx , xy .

per $x=0$: si ha:
$$\begin{cases} y_i = y_A - \frac{\cos(\hat{y}\hat{z})}{\cos(\hat{x}\hat{z})} x_A; \\ z_i = z_A - \frac{\cos(\hat{z}\hat{x})}{\cos(\hat{x}\hat{z})} x_A; \end{cases}$$

per $y=0$: "
$$\begin{cases} x_i = x_A - \frac{\cos(\hat{x}\hat{z})}{\cos(\hat{y}\hat{z})} y_A; \\ z_i = z_A - \frac{\cos(\hat{z}\hat{y})}{\cos(\hat{y}\hat{z})} y_A; \end{cases}$$

per $z=0$: "
$$\begin{cases} x_i = x_A - \frac{\cos(\hat{x}\hat{y})}{\cos(\hat{z}\hat{y})} z_A; \\ y_i = y_A - \frac{\cos(\hat{y}\hat{x})}{\cos(\hat{z}\hat{y})} z_A; \end{cases}$$

Ove l'indice "i" vuol dire intersezione col piano definito da: $x=0$; $y=0$; $z=0$ e quindi coordinate diverse; cioè: y_i per $x=0$ è diverso, generalmente, da y_i per $z=0$. così le altre coordinate.

Proponiamoci ora il problema inverso:

"Date le equazioni di due piani che definiscono una retta, scrivere l'equazione della retta secondo la doppia uguaglianza!"

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Siano le equazioni dei due piani. Se cerchiamo le tracce dei due piani sui piani di proiezione, i punti comuni a due tracce omonime, sono punti della

retta.

Cerchiamo le due tracce (intersezioni) col piano xy ; basterà porre $z=0$ nelle due equazioni ed avremo:

$$\left. \begin{aligned} t'_1 &= a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ t'_2 &= a_2x + b_2y + d_2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_A &= \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; & y_A &= \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; & z_A &= 0 \end{aligned}$$

Cerchiamo le tracce col piano xz ; ($y=0$)

$$\left. \begin{aligned} t''_1 &= a_1x + c_1z + d_1 = 0 \\ t''_2 &= a_2x + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_B &= \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}; & z_B &= \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}; & y_B &= 0 \end{aligned}$$

Cerchiamo le tracce col piano: yz ; ($x=0$)

$$\left. \begin{aligned} t'''_1 &= b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ t'''_2 &= b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y_C &= \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}; & z_C &= \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}; & x_C &= 0 \end{aligned}$$

I punti A, B, C debbono risultare allineati, bastano due di essi per scrivere la doppia uguaglianza. Dove verificarsi, per l'allineamento, che:

$$\boxed{\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}; \text{ da cui:}$$

$$\cos \alpha = \frac{(x_B - x_A)}{\overline{AB}}; \quad \cos \beta = \frac{(y_B - y_A)}{\overline{AB}}; \quad \cos \gamma = \frac{(z_B - z_A)}{\overline{AB}}$$

$$\boxed{\frac{(x - x_A)}{\cos \alpha} = \frac{(y - y_A)}{\cos \beta} = \frac{(z - z_A)}{\cos \gamma}}$$

Condizioni di appartenenza

- 1) Un punto appartiene ad una retta se le sue coordinate verificano l'equazione della retta.
- 2) Un punto appartiene ad un piano se le sue coordinate verificano l'equazione del piano.
- 3) Una retta appartiene ad un piano se le coordinate sopracalcolate di A, B, C verificano le equazioni delle tracce del piano.

Esempi numerici

- 1) Dato il punto $P \equiv (3, 1, -2)$ scrivere l'equazione della stella di piani passanti per P

$$a(x-3) + b(y-1) + c(z+2) = 0$$

$$ax + by + cz - (3a + b - 2c) = 0$$

possiamo anche scrivere:

$$\cos(\alpha)(x-3) + \cos(\beta)(y-1) + \sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta}(z+2) = 0$$

Ove al variare dei parametri α e β si ha la individuazione dei piani della stella.

- 2) Dato il punto $P \equiv (3, 1, -2)$ scrivere l'equazione della stella di rette passanti per P .

$$\frac{(x-3)}{\cos(\alpha)} = \frac{(y-1)}{\cos(\beta)} = \frac{(z+2)}{\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta}}$$

3) Data la retta: $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

trovare le coordinate delle tracce della retta sui piani di riferimento. (Si consi tracce di una retta i punti di intersezione della retta coi piani di riferimento.)

Sul piano: $xy; z=0$ $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ $y_{T_1} = -\frac{1}{3}; x_{T_1} = -\frac{4}{3};$

sul piano: $xz; y=0$ $\begin{cases} x + z = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$ $x_{T_2} = -\frac{3}{2}; z_{T_2} = \frac{1}{2}$

sul piano: $yz; x=0$ $\begin{cases} -y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$ $y_{T_3} = -3; z_{T_3} = -4$

Le coordinate delle tracce sono:

$T_1 \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); T_2 \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right); T_3 \equiv (0, -3, -4)$

4) Data la retta $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ scrivere
l'equazione del fascio di piani passanti per r

L'equazione della retta è quella dell'esercizio precedente per cui ci avvalremo dei punti di traccia calcolati

Scriviamo l'equazione del piano: $\left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right)y + \left(\frac{c}{d}\right)z + 1 = 0$

passante per T_3 avremo $0 + \left(\frac{b}{d}\right)(-3) + \left(\frac{c}{d}\right)(-4) + 1 = 0$ da cui:

$\frac{b}{d} = \frac{1}{3}(1 - 4\frac{c}{d}) \rightarrow \left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\frac{c}{d}\right)y + \left(\frac{c}{d}\right)z + 1 = 0$; il piano

passante per T_2 : $\left(\frac{a}{d}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$; da cui $\frac{a}{d} = \left(-1 - \frac{1}{3}\frac{c}{d}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\frac{a}{d} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{c}{d}\right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\left(2 + \frac{c}{d}\right)x + \frac{1}{3}\left(1 - 4\frac{c}{d}\right)y + \left(\frac{c}{d}\right)z + 1 = 0}$ ove

l'unico parametro per definire un piano del fascio è c/d .

Basterebbero le coordinate di un punto non appartenente alla retta per definire il piano. Se sostituiamo T_1 (che appartiene alla retta) si ha:

$$-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{c}{d}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\frac{c}{d}\right) + 0 + 1 = 0$$

$$-\frac{8}{9} - \cancel{\frac{4}{9}\frac{c}{d}} - \frac{1}{9} + \cancel{\frac{4}{9}\frac{c}{d}} + 1 = 0$$

Verifica che il punto T_1 appartiene al piano indipendentemente da $\frac{c}{d}$ cioè appartiene alla retta del fascio.
posto: $\frac{c}{d} = \lambda$ e moltiplicando per 3 si ha:

$$(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (3\lambda)z + 3 = 0$$

equazione del fascio di piani passanti per la retta, con λ parametro. Per $\lambda=0 \rightarrow 2x+y+3=0$ (piano parallelo a z).

5) Dato il fascio di piani: $(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (3\lambda)z + 3 = 0$ trovare l'equazione del piano passante per $P=(3,1,-2)$

sostituendo:

$$(2+\lambda)3 + (1-4\lambda)1 + (3\lambda)(-2) + 3 = 0$$

$$6 + 3\lambda + 1 - 4\lambda - 6\lambda + 3 = 0 \rightarrow 7\lambda = 10 \quad \boxed{\lambda = \frac{10}{7}}$$

$$\left(2+\frac{10}{7}\right)x + \left(1-\frac{40}{7}\right)y + \frac{30}{7}z + 3 = 0$$

$$24x - 33y + 30z + 21 = 0 \rightarrow \boxed{8x - 11y + 10z + 7 = 0}$$

che è l'equazione cercata. Verifica: $8 \cdot 3 - 11 \cdot 1 - 10 \cdot 2 + 7 = 0$

$$\cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{285}}; \quad \cos \beta = \frac{-11}{\sqrt{285}}; \quad \cos \gamma = \frac{10}{\sqrt{285}}; \quad \delta = \frac{-7}{\sqrt{285}}$$

6) Data la retta: $r = \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ verificare che appartiene al piano: $8x - 11y + 10z + 7 = 0$.

di questa retta abbiamo già calcolato le tracce (esercizio 3)

$$T_1 \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); \quad T_2 \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0, +\frac{1}{2}\right); \quad T_3 \equiv (0, -3, -4).$$

basta che due punti soddisfino l'equazione del piano.

Sostituendo T_1 : $8\left(-\frac{4}{3}\right) - 11\left(-\frac{1}{3}\right) + 7 = 0 \rightarrow -32 + 11 + 21 = 0$

Sostituendo T_2 : $8\left(-\frac{3}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0 \rightarrow -24 + 10 + 14 = 0$

è già sufficiente, ma sostituiamo anche T_3

$$(-11)(-3) + (10)(-4) + 7 = 0 \rightarrow +33 - 40 + 7 = 0$$

7) Dati tre punti: $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$; $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$; $C \equiv (x_C, y_C, z_C)$ scrivere l'equazione del piano passante per essi.

Sostituendo ordinatamente le coordinate dei punti nell'equazione generica di un piano: $\boxed{\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0}$ otteniamo tre equazioni nelle incognite: $\frac{a}{d}$; $\frac{b}{d}$; $\frac{c}{d}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{d}\right)x_A + \left(\frac{b}{d}\right)y_A + \left(\frac{c}{d}\right)z_A = -1 \\ \left(\frac{a}{d}\right)x_B + \left(\frac{b}{d}\right)y_B + \left(\frac{c}{d}\right)z_B = -1 \\ \left(\frac{a}{d}\right)x_C + \left(\frac{b}{d}\right)y_C + \left(\frac{c}{d}\right)z_C = -1 \end{cases}$$

applicando Cramer:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \Delta; \quad \begin{vmatrix} -1 & y_A & z_A \\ -1 & y_B & z_B \\ -1 & y_C & z_C \end{vmatrix} = \Delta_{y_A}; \quad \begin{vmatrix} x_A & -1 & z_A \\ x_B & -1 & z_B \\ x_C & -1 & z_C \end{vmatrix} = \Delta_{x_A}; \quad \begin{vmatrix} x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \\ x_C & y_C & -1 \end{vmatrix} = \Delta_{z_A}$$

avremo che:

$$\frac{a}{d} = \frac{\Delta x_d}{\Delta} ; \quad \frac{b}{d} = \frac{\Delta y_d}{\Delta} ; \quad \frac{c}{d} = \frac{\Delta z_d}{\Delta} ;$$

sostituendo nell'equazione generica del piano e moltiplicando per Δ si ha:

$$\boxed{(\Delta x_d)x + (\Delta y_d)y + (\Delta z_d)z + \Delta = 0}$$

in dettaglio:

$$\boxed{\begin{vmatrix} -1 & y_A & z_A \\ -1 & y_B & z_B \\ -1 & y_C & z_C \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_A & -1 & z_A \\ x_B & -1 & z_B \\ x_C & -1 & z_C \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \\ x_C & y_C & -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = 0}$$

8) Scrivere l'equazione del piano per i punti: $P \equiv (3, 1, -2)$
 $M \equiv (-1, -1, -1)$; $N \equiv (-2, 1, 2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7$$

$$\Delta x_d = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-4) = +8$$

$$\Delta y_d = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 5 = -11$$

$$\Delta z_d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+1)5 = +10$$

L'equazione del piano sarà:

$$\boxed{8x - 11y + 10z + 7 = 0}$$

(equazione identica a quella dell'esercizio 5)

9) Verificare che i punti: $M \equiv (-1, -1, -1)$; ed $N \equiv (-2, +1, +2)$; appartengono alla retta:

$$L \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

basta sostituire:

$$M) \quad \begin{cases} -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \\ -1 - 2 + 1 + 2 = 0 \end{cases} \quad (M \text{ verificato})$$

$$N) \quad \begin{cases} -2 - 1 + 2 + 1 = 0 \\ -2 + 2 - 2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (N \text{ verificato})$$

Possiamo scrivere l'equazione della retta per $\overline{MN}$ nella forma:

$$\frac{(x+1)}{(-2+1)} = \frac{(y+1)}{(1+1)} = \frac{(z+1)}{(2+1)}$$

eioè:

$$\boxed{\frac{(x+1)}{-1} = \frac{(y+1)}{2} = \frac{(z+1)}{3}}$$

poiché: $\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$ i coseni direttori della retta $\overline{MN}$ saranno: $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}}$; $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

I piani paralleli agli assi contenenti la retta $\overline{MN}$ saranno:

parallelo a z : $2x + 2 = -y - 1 \quad \hookrightarrow \quad 2x + y + 3 = 0$

parallelo ad y : $3x + 3 = -z - 1 \quad \hookrightarrow \quad 3x + z + 4 = 0$

parallelo ad x : $3y + 3 = 2z + 2 \quad \hookrightarrow \quad 3y - 2z + 1 = 0$

Le tracce della retta $\overline{MN}$ sui piani di riferimento saranno:

per $z=0$ sul piano xy : $x_{T_1} = -\frac{4}{3}$; $y_{T_1} = -\frac{1}{3}$; $T_1 \equiv (-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$
 per $y=0$ " " xz : $x_{T_2} = -\frac{3}{2}$; $z_{T_2} = +\frac{1}{2}$; $T_2 \equiv (-\frac{3}{2}, 0, +\frac{1}{2})$
 per $x=0$ " " yz : $y_{T_3} = -3$; $z_{T_3} = -4$; $T_3 \equiv (0, -3, -4)$

(V. esercizio 3)

10) Date le equazioni di tre piani, trovare il punto comune.

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

3/ determinante dei coefficienti $\bar{e}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & +1 \\ 1 & +2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & +1 \\ 2 & +2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11 \rightarrow \boxed{x = \frac{11}{10}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 \quad \boxed{y = \frac{8}{10}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \quad \boxed{z = \frac{7}{10}}$$

Se Q $\bar{e}$ il punto comune ai tre piani: $\boxed{Q \equiv (1,1 \mp 0,8, +0,7)}$

Osserviamo che se il determinante dei coefficienti $\bar{e}$ zero, il punto $\bar{e}$ all'infinito, cio $\bar{e}$ le tre rette, intersezione dei tre piani, sono fra loro parallele, ma basta che anche due piani siano paralleli per far s $\bar{i}$ che il punto comune sia al-

l'infinito, ed in questo caso è all'infinito anche la terza retta di intersezione. Se due piani sono paralleli, due righe del determinante dei coefficienti sono proporzionali o addirittura uguali, per cui $\Delta = 0$. Se i tre piani sono paralleli, le tre rette di intersezione sono all'infinito, e le tre righe del determinante dei coefficienti hanno elementi proporzionali. ($\Delta = 0$).

Se due righe sono indipendenti fra loro, ci domandiamo come deve essere la terza riga affinché le tre rette di intersezione dei tre piani, siano parallele. È evidente che: il terzo piano deve essere parallelo alla retta comune agli altri due.

In questo caso, la terza riga del determinante dei coefficienti, non sarà proporzionale ad una delle altre due righe fra loro indipendenti, ma sarà combinazione lineare delle altre due righe, ciò implica: $\Delta = 0$; ma implica anche che ciascuna riga può essere riguardata come combinazione lineare delle altre due, cioè: ciascun piano è parallelo alla retta comune agli altri due.

Questo problema ci porta a considerare le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità, fra rette, fra piani, fra piani e rette.

Condizioni di parallelismo

1) Rette parallele hanno gli stessi coseni direttori.

cioè se scriviamo l'equazione di due rette in forma

canonica: $r \equiv \left(\frac{x-x_A}{l_1} = \frac{y-y_A}{m_1} = \frac{z-z_A}{n_1} \right)$

$$s \equiv \left(\frac{x-x_B}{l_2} = \frac{y-y_B}{m_2} = \frac{z-z_B}{n_2} \right)$$

dovrà essere:

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = K = \text{costante,}}$$

affinchè le due rette siano parallele.

Se invece le due rette sono espresse dalle equazioni di due coppie di piani:

$$r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Poichè, se le due rette sono parallele, ogni piano deve essere parallelo alla retta comune di altri due,

avremo: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$

ove nessuna riga è proporzionale alle altre affinché le rette siano reali. In ogni caso, se le rette sono parallele, qualsiasi determinante ottenuto da una qualsiasi combinazione di tre righe (1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4) deve essere nullo. (basta verificarne due).

2) Piani paralleli hanno gli stessi coseni direttori

cioè:

$$\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Se i due piani sono paralleli dovrà essere:

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = K \neq d_1/d_2$$

Se anche $d_1/d_2 = K$ allora i due piani sono coincidenti.

3) La condizione di parallelismo fra rette e piani può esprimersi in vari modi:

3a) Se il piano è parallelo ad uno dei due piani determinanti la retta.

$$\pi \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

Cioè se: $a_3/a_1 = b_3/b_1 = c_3/c_1 = K = \text{costante}$. oppure se:

$$a_3/a_2 = b_3/b_2 = c_3/c_2 = K = \text{costante}$$

3b) Se il determinante dei coefficienti è zero

(comprende il caso precedente) cioè la retta ed il piano

sono paralleli se: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

3c) Se la retta è espressa in forma canonica, può sempre ridursi a due distinte equazioni la doppia uguaglianza ricadendo così nei casi precedenti:

$$r \equiv \left(\frac{x-x_A}{e} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n} \right)$$

si riduce:

$$r \equiv \begin{cases} mx - ly - mx_A + ly_A = 0 \\ nx - lz - nx_A + lz_A = 0 \end{cases}$$

e se il piano ha per equazione:

$$\pi \equiv a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

per il parallelismo dovrà essere:

$$\begin{vmatrix} m & -l & 0 \\ n & 0 & -l \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3d) Una retta è parallela ad un piano se è retta di giacitura di un piano perpendicolare al piano dato

Cio' vuol dire che i coseni direttori della retta debbono uguagliare i coseni del piano perpendicolare. Se il piano perpendicolare al piano dato ha per equazione: $\pi = ax + by + cz + d = 0$ e la retta: $\frac{x-x_A}{e} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n}$ dovrà essere: $\frac{a}{e} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} = K = \text{costante}$.

Equazione segmentaria del piano.

Siano: P, Q, R tre punti rispettivamente sull'asse x , sull'asse y , sull'asse z ; e siano: p, q, r , le distanze dall'origine degli assi di questi tre punti. Cioè sia:
 $\overline{OP} = p$; $\overline{OQ} = q$; $\overline{OR} = r$.

Le equazioni delle tracce del piano passante per P, Q, R , sui piani: xy, xz, yz ; espresse in forma segmentaria saranno:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1} \quad ; \quad \boxed{\frac{x}{p} + \frac{z}{r} = 1} \quad ; \quad \boxed{\frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

e poiché i punti del piano debbono soddisfare le tre equazioni, rispettivamente quando sono nulli: z, y, x , avremo che l'equazione segmentaria del piano sarà:

$$(1) \quad \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

ove moltiplicando per: $(p \cdot q \cdot r)$, abbiamo:

$$(2) \quad \boxed{(qr)x + (pr)y + (pq)z - pqr = 0}$$

che è l'equazione ordinaria del piano ove:

$$a = (qr) \quad ; \quad b = (pr) \quad ; \quad c = (pq) \quad ; \quad d = (pqr).$$

Si noti che p, q, r , sono gli spigoli di un parallelepipedo trirettangolo ove a, b, c , sono le aree delle facce sui piani: yz, xz, xy ; mentre " $-d$ " è il volume del parallelepipedo.

Dividendo la (2) per: $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(qz)^2+(pz)^2+(pq)^2}$,
 abbiamo:
$$\frac{1}{\sqrt{(qz)^2+(pz)^2+(pq)^2}} = \frac{1}{(pqz)\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}}$$

quindi:

$$D = \frac{x}{p\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}} + \frac{y}{q\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}} + \frac{z}{z\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}}$$

che poteva ottenersi direttamente dalla (1) dividendo per: $\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}$.

Quindi la distanza del piano dall'origine degli

assi:
$$-\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{z^2}}}$$
 e quindi possiamo dire:

$$-\delta/p = \cos \alpha$$

$$-\delta/q = \cos \beta$$

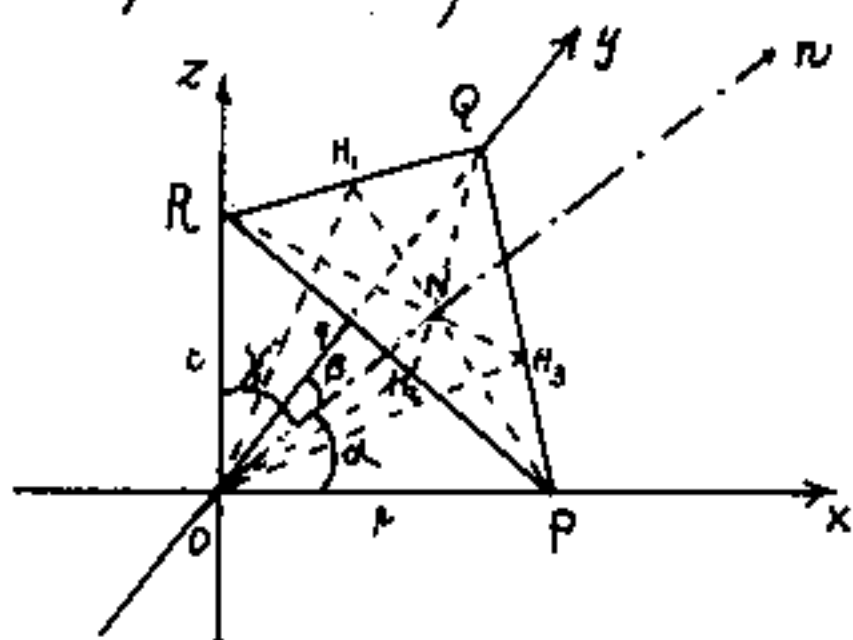
$$-\delta/z = \cos \gamma$$

Interessante notare:

"La distanza di un piano dall'origine degli assi è il reciproco della radice quadrata della somma dei quadrati dei reciproci dei segmenti staccati dal piano sugli assi e misurati a partire dall'origine stessa."

Si noti che i segni possibili di p, q, z sono le disposizioni con ripetizione di due elementi (+, -) di classe tre cioè $2^3 = 8$.
 e quindi è indeterminato il segno di δ (da assumere assoluto)

Dimostriamo che il punto N, intersezione di un piano con la normale (retta di giacitura) uscente dall'origine degli assi, è l'ortocentro del triangolo PQR (delimitato dalle tracce del piano sui piani di proiezione).



sia: $(ax + by + cz + d = 0)$ l'eq. di PQR

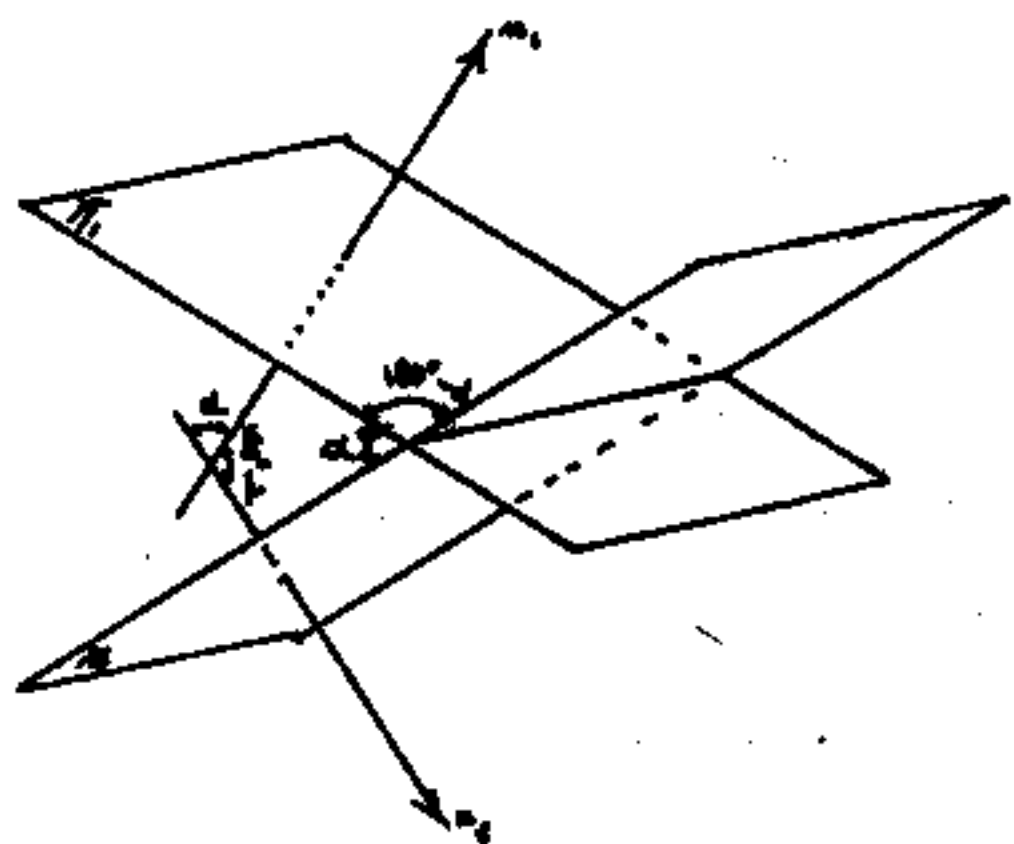
Nel fascio di piani passanti per $\overrightarrow{ON}$, (tutti perpendicolari a PQR), vi sono anche i piani che passano per gli assi: x, y, z ; per esempio il piano passante per l'asse

z (quindi perpendicolare ad xy) e per $\overrightarrow{ON}$ (quindi perpendicolare a PQR) è necessariamente perpendicolare alla retta comune $\overline{PQ}$; esso avrà per traccia su xy la retta $\overline{OH_3}$ ed incontrerà PQR secondo l'altezza $\overline{RH_3}$ (dovendo tutte le rette per H_3 , appartenenti a questo piano, essere perpendicolari a $\overline{PQ}$). Analogo discorso per il piano passante per y e per $\overrightarrow{ON}$ che traccierà l'altezza $\overline{QH_2}$, e per il piano passante per x e per $\overrightarrow{ON}$ che traccierà l'altezza $\overline{PH_1}$. Per cui essendo N comune alle tre altezze $\overline{PH_1}, \overline{QH_2}, \overline{RH_3}$ è l'ortocentro del triangolo PQR.

$$\overrightarrow{ON} = \delta; \quad x_N = -\delta \cos \alpha; \quad y_N = -\delta \cos \beta; \quad z_N = -\delta \cos \gamma; \quad N \equiv -\delta (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

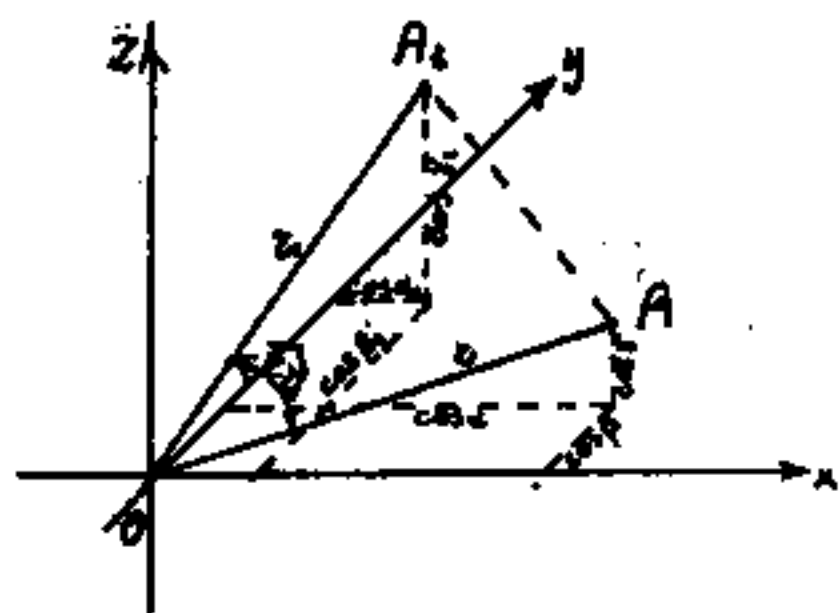
$$N \equiv \frac{-d}{(a^2 + b^2 + c^2)} (a, b, c) \quad \text{coordinate di N.}$$

Angolo fra due piani (fra due rette)



Due piani che hanno una retta in comune formano quattro angoli diedri, due a due uguali, se opposti al vertice, o supplementari, se adiacenti. Gli stessi angoli sono formati dalle rette di giacitura.

Consideriamo quindi due rette di giacitura uscenti dall'origine O degli assi; stacciamo su



di esse i segmenti unitari $\overline{OA} = 1$; $\overline{OA_1} = 1$; rispettivamente su z ed z_1 . Le coordinate di A e di A_1 , sono i coseni direttori di z ed z_1 , cioè:

$$A \equiv (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma); \quad A_1 \equiv (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$$

Perciò essendo:

$$(\overline{AA_1})^2 = (x_A - x_{A_1})^2 + (y_A - y_{A_1})^2 + (z_A - z_{A_1})^2$$

avremo anche:

$$(\overline{AA_1})^2 = (\cos \alpha - \cos \alpha_1)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 + (\cos \gamma - \cos \gamma_1)^2$$

Sviluppando i quadrati:

$$(\overline{AA_1})^2 = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1) - 2(\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1)$$

ricordando che la somma dei quadrati dei coseni direttori $\bar{e} = 1$,

$$\boxed{AA_1^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1)}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot al triangolo AOA_1 , e sia $\hat{AOA_1} = \hat{e}e_1$ l'angolo opposto ad $\overline{AA_1}$; tenendo conto che $\overline{OA} = \overline{OA_1} = 1$, abbiamo:

$$(\overline{AA_1})^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos(\hat{AOA_1}) \text{ cioè:}$$

$$\boxed{(\overline{AA_1})^2 = 2 - 2 \cos(\hat{e}e_1)}$$

Confrontando le due espressioni di $(\overline{AA_1})^2$ abbiamo:

$$\boxed{\cos(\hat{e}e_1) = (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1)}$$

Formula molto importante che fornisce l'angolo fra due direzioni, considerate di giacitura, e anche l'angolo diedro fra due piani.

Abbiamo detto direzioni anziché rette perché la formula vale anche per rette sghembe

Poiché: $(\cos 90^\circ = 0)$ l'annullarsi dell'espressione è anche condizione di perpendicolarità fra piani e fra rette non sghembe, cioè complanari.

Condizione di perpendicolarità fra piani e fra rette

siano:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

le equazioni dei due piani; sappiamo che i coefficienti sono proporzionali ai coseni direttori.

cioè: $K_1 \cos \alpha_1 = a_1$; $K_1 \cos \beta_1 = b_1$; $K_1 \cos \gamma_1 = c_1$

$$K_2 \cos \alpha_2 = a_2$$
; $K_2 \cos \beta_2 = b_2$; $K_2 \cos \gamma_2 = c_2$

La condizione di perpendicolarità: $(\cos(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = 0)$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

sostituendo abbiamo:

$$\frac{a_1 a_2}{K_1 K_2} + \frac{b_1 b_2}{K_1 K_2} + \frac{c_1 c_2}{K_1 K_2} = 0$$

e moltiplicando per $K_1 K_2$ si ha:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

condizione di perpendicolarità

fra piani

Se l_1, m_1, n_1 ; e l_2, m_2, n_2 sono valori proporzionali ai coseni direttori di due rette complanari

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Si ha la condizione di perpendicolarità fra
rette complanari (o fra direzioni di rette non complanari)

Il seno dell'angolo diedro di due piani

Sia " θ " l'angolo diedro dei due piani, cioè l'angolo fra le direzioni di giacitura, abbiamo:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{K_1 K_2} (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)$$

ove: $K_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$; $K_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$;

sviluppando e semplificando avremo anche:

$$\sin(\theta) = \frac{1}{K_1 K_2} \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 a_2^2 + c_1^2 b_2^2 - 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_2 c_1 c_2 + b_1 b_2 c_1 c_2)}$$

dimostriamo che l'espressione sotto radice equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2$$

infatti:

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 = b_1^2 c_2^2 + c_1^2 b_2^2 - 2 b_1 b_2 c_1 c_2$$

$$(c_1 a_2 - a_1 c_2)^2 = c_1^2 a_2^2 + a_1^2 c_2^2 - 2 a_1 a_2 c_1 c_2$$

$$\text{sommando} = a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 b_2^2 + c_1^2 a_2^2 - 2 \begin{pmatrix} a_1 a_2 b_1 b_2 + \\ b_1 b_2 c_1 c_2 + \\ a_1 a_2 c_1 c_2 \end{pmatrix}$$

perciò possiamo scrivere:

$$\sin(\theta) = \frac{1}{K_1 K_2} \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2}$$

ed anche:

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$

I coseni direttori della retta.

Quando la retta è definita dall'intersezione di due piani, i suoi coseni direttori sono comuni alla direzionalità delle rette ad essa parallele; e sono legati alle due direzionalità delle rette di giacitura dei due piani.

Consideriamo quindi la retta parallela passante per l'origine degli assi: (avente gli stessi coseni direttori):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

Consideriamo, su tale retta, il punto P tale che sia unitaria la sua distanza dall'origine degli assi:

$\overline{OP} = 1$; Avremo che i coseni direttori della retta:

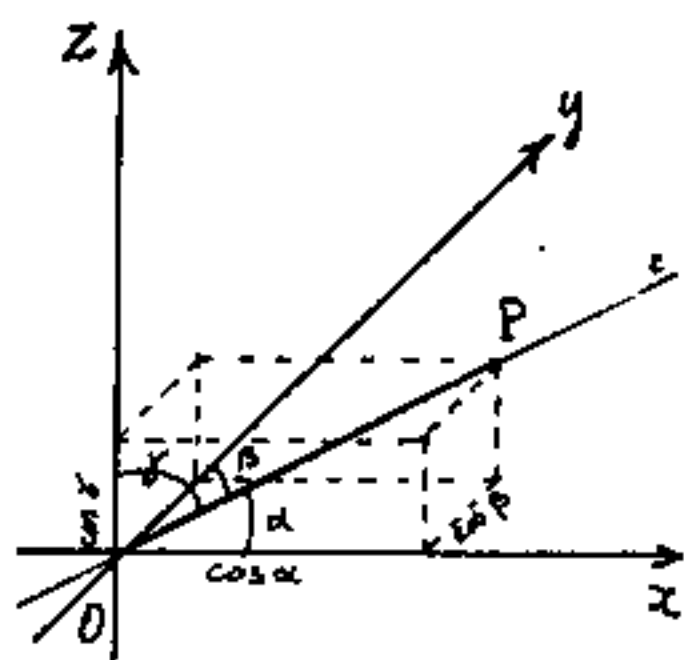
$$\cos(\hat{x}\hat{r}) = \frac{x_P}{OP}; \cos(\hat{y}\hat{r}) = \frac{y_P}{OP}; \cos(\hat{z}\hat{r}) = \frac{z_P}{OP};$$

sono le coordinate di P :

$$x_P = \cos(\hat{x}\hat{r})$$

$$y_P = \cos(\hat{y}\hat{r})$$

$$z_P = \cos(\hat{z}\hat{r})$$



Poiché P è un punto della

retta, possiamo sostituire le sue coordinate nell'equazione della retta stessa. Avremo:

$$\begin{cases} a_1 \cos(\hat{x}\hat{v}) + b_1 \cos(\hat{y}\hat{v}) + c_1 \cos(\hat{z}\hat{v}) = 0 \\ a_2 \cos(\hat{x}\hat{v}) + b_2 \cos(\hat{y}\hat{v}) + c_2 \cos(\hat{z}\hat{v}) = 0 \end{cases}$$

Questa coppia di equazioni omogenee nelle tre incognite $\cos(\hat{x}\hat{v})$; $\cos(\hat{y}\hat{v})$; $\cos(\hat{z}\hat{v})$ può essere scritta:

$$a_1 \cos(\hat{x}\hat{v}) + b_1 \cos(\hat{y}\hat{v}) = -c_1 \cos(\hat{z}\hat{v})$$

$$a_2 \cos(\hat{x}\hat{v}) + b_2 \cos(\hat{y}\hat{v}) = -c_2 \cos(\hat{z}\hat{v})$$

risolvendo in funzione di $\cos(\hat{z}\hat{v})$ abbiamo:

$$\cos(\hat{x}\hat{v}) = \frac{-\cos(\hat{z}\hat{v}) \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad \cos(\hat{y}\hat{v}) = \frac{-\cos(\hat{z}\hat{v}) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Poiché scambiando due righe o due colonne un determinante cambia segno, possiamo scrivere:

$$\frac{\cos(\hat{x}\hat{v})}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cos(\hat{y}\hat{v})}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cos(\hat{z}\hat{v})}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = K = (\text{cost})$$

Abbiamo così le uguaglianze:

$$\cos(\hat{x}\hat{v}) = K \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \cos(\hat{y}\hat{v}) = K \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \cos(\hat{z}\hat{v}) = K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ma la somma dei quadrati dei coseni direttori è uno, perciò:

$$K^2 \left\{ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right\} = 1$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

E' ora possibile esprimere i coseni direttori della retta in funzione dei coefficienti dell'equazione:

$$\cos(\hat{x}\hat{r}) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$\cos(\hat{y}\hat{r}) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$\cos(\hat{z}\hat{r}) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

coseni direttori
della retta:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

indipendenti
da d_1 e d_2

Per memorizzare il calcolo dei coseni direttori possiamo considerare il determinante ottenuto dalla matrice dei coefficienti orlata superiormente con i coseni direttori:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\hat{x}\hat{r}) & \cos(\hat{y}\hat{r}) & \cos(\hat{z}\hat{r}) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Sviluppando questo determinante per gli

elementi della prima riga e scambiando le colonne al secondo minore per cambiare segno, si ha:

$$\Delta = \cos(\hat{x}\hat{z}) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \cos(\hat{y}\hat{z}) \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \cos(\hat{z}\hat{x}) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

sostituendo il valore dei minori:

$$\Delta = \frac{1}{K} \left(\cos^2(\hat{x}\hat{z}) + \cos^2(\hat{y}\hat{z}) + \cos^2(\hat{z}\hat{x}) \right) \quad \text{cioè}$$

$$\Delta = \frac{1}{K} = \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

Cioè scritto il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\hat{x}\hat{y}) & \cos(\hat{y}\hat{z}) & \cos(\hat{z}\hat{x}) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

"Il valore di un coseno direttore è dato dal suo minore diviso $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$ "

Abbiamo visto che detto θ l'angolo diedro dei due piani determinanti la retta si ha anche: $\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = \sin \theta \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}$

quindi:

$\cos(\hat{x}\hat{z}) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sin \theta \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$
$\cos(\hat{y}\hat{z}) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\sin \theta \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$
$\cos(\hat{z}\hat{x}) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\sin \theta \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$

Alcune considerazioni sul parallelismo e sulla perpendicolarità

Abbiamo già esposto le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità, che sinteticamente riapiogliamo.

Parallelismo: fra rette (stessi coseni direttori)

fra piani (stessi coseni direttori)

fra piani e rette: $\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \right)$

Perpendicolarità: fra rette: $(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0)$

fra piani: $(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0)$

fra rette e piani: (la retta è di giacitura del piano)
stessi coseni direttori
 $\left(\frac{a}{e} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \right)$

La condizione di perpendicolarità fra piani,

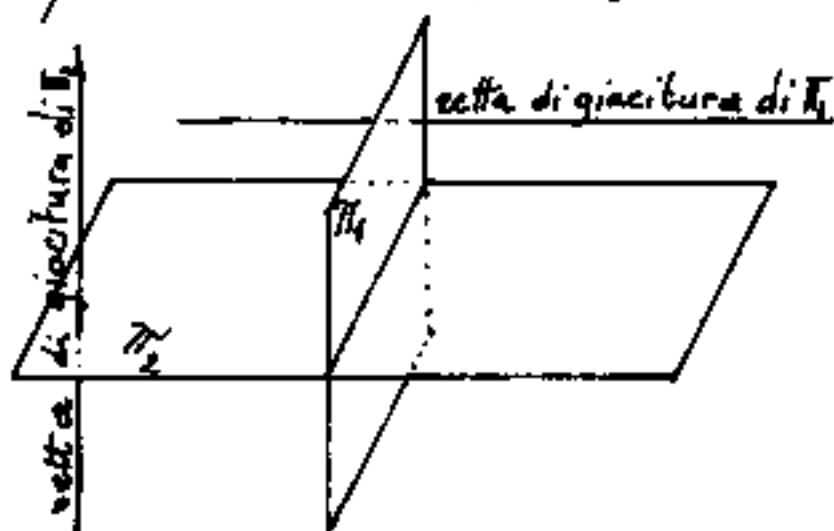
afferma: "essere nulla la somma dei prodotti dei

coseni omonimi o di valori ad essi proporzionali". In

formule: $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

È evidente che un piano perpendicolare ad un altro, è parallelo alle rette di giacitura del piano di cui è perpendicolare. Quindi se l'equazione del piano π_1



ha come coefficienti: a_1, b_1, c_1 ,
(proporzionali ai coseni direttori
delle sue rette di giacitura) e π_1
è perpendicolare a π_2 le cui

rette di giacitura abbiano i coseni direttori proporzionali ad (l_2, m_2, n_2) per la condizione di perpendicolarità fra π_1 e π_2 avremo:

$$a_1 l_2 + b_1 m_2 + c_1 n_2 = 0$$

questa formula è condizione di parallelismo fra il piano: $\pi_1 \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0)$ e la retta:

$$r \equiv \left(\frac{(x-x_A)}{l_2} = \frac{(y-y_A)}{m_2} = \frac{(z-z_A)}{n_2} \right)$$

Possiamo così esprimere in modo diverso la condizione di parallelismo fra piani e rette:

"Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano ed una retta siano paralleli è che sia nulla la somma dei prodotti dei coseni omonimi o di valori ad essi proporzionali"

Al fine di affrontare gli esercizi è bene ricordare che:

- 1) Data una retta, le rette ad essa parallele sono infinite, ma ve n'è una sola passante per un punto dato.
- 2) Data una retta, le direzioni ad essa perpendicolari sono infinite nello spazio tridimensionale, e le rette ad essa perpendicolari sono pure infinite. Se fissiamo un punto sulla retta data, le rette ad essa perpendicolari e passanti per quel punto sono pure infinite e costituiscono il piano normale alla retta passante per quel punto. Ma data una retta ed un punto fuori di essa, vi è

una sola retta che passi per quel punto e sia perpendicolare alla retta data.

3) Data una retta esistono infiniti piani ad essa paralleli, ma vi è un solo piano parallelo che passi per un'altra retta data che sia sghemba rispetto alla prima. Cioè date due rette sghembe esiste un solo piano passante per una di esse che sia parallelo all'altra.

4) Data una retta esistono infiniti piani ad essa perpendicolari (giacitura di piani), ma uno solo passa per un punto assegnato qualsiasi, cioè esterno o sulla retta.

5) Dato un piano esistono infiniti piani paralleli, dei quali uno solo per un punto assegnato

6) Dato un piano esistono infiniti piani perpendicolari (un fascio per ogni retta di giacitura) ma ne esiste uno solo passante per una retta assegnata non ortogonale

7) Dato un piano esistono infinite rette parallele a distanza assegnata, ma una sola che giace su un altro piano assegnato che non sia parallelo al primo. Cioè dati due piani non paralleli esiste una sola retta che, a distanza assegnata, giace su un piano ed è parallela all'altro.

8) Dato un piano, fra le infinite rette ad esso perpendicolari (rette di giacitura) una sola passa per un punto assegnato.

Esercizi su parallelismo

1) Data la retta $r \equiv \left(\frac{x-x_A}{e} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n} \right)$ scrivere l'equazione della retta parallela passante per $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$.

l'equazione sarà:

$$\boxed{\frac{(x-x_B)}{e} = \frac{(y-y_B)}{m} = \frac{(z-z_B)}{n}}$$

2) Data la retta $r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ trovare l'equazione della retta parallela passante per: $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

l'equazione sarà:

$$\boxed{\frac{(x-x_B)}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{(y-y_B)}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{(z-z_B)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}$$

3) Dato il piano: $ax + by + cz + d = 0$, scrivere l'equazione del piano parallelo passante per $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

L'equazione sarà: $a(x-x_B) + b(y-y_B) + c(z-z_B) = 0$

Cioè:

$$\boxed{ax + by + cz - (ax_B + by_B + cz_B) = 0}$$

avremmo potuto dire in quanto i coseni direttori sono gli stessi proporzionali ad a, b, c , nel piano parallelo varierà solo " d " che indicheremo con d_1 e poiché l'equazione deve essere soddisfatta dalle coordinate di B avremo:

$$ax_B + by_B + cz_B + d_1 = 0$$

da cui: $d_1 = -(ax_B + by_B + cz_B)$ e cioè:

$$\boxed{ax + by + cz - (ax_B + by_B + cz_B) = 0}$$

4) Dato il piano: $(ax+by+cz+d=0)$ scrivere l'equazione del piano parallelo distante h e sia più lontano dal centro assi (a pari distanza i piani sono due uno più vicino ad uno più lontano)

dividiamo l'equazione per $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e si ha

$$\boxed{(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - \delta = 0}$$

perciò l'equazione richiesta sarà:

$$\boxed{(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - (\delta+h) = 0}$$

Esempio numerico

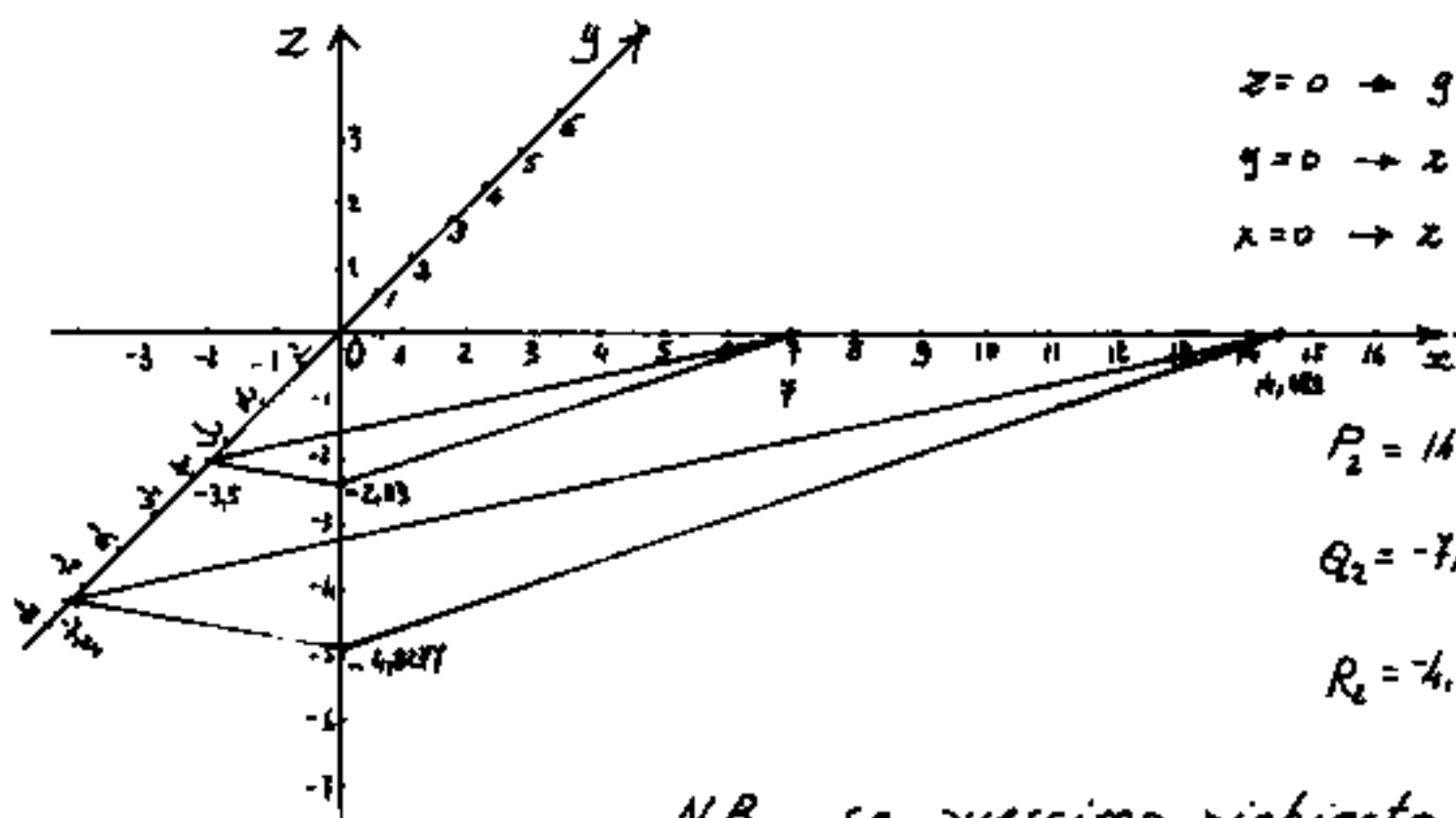
sia: $\boxed{x-2y-3z-7=0}$ il piano dato e sia $\boxed{h=2}$

$$\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{2}{\sqrt{14}}y - \frac{3}{\sqrt{14}}z - \frac{7}{\sqrt{14}} - 2 = 0$$

$$x-2y-3z - (7+2\sqrt{14}) = 0$$

$$\boxed{x-2y-3z - 14,48331 = 0}$$



$$z=0 \rightarrow y = \frac{x}{2} - 3.5$$

$$y=0 \rightarrow x = \frac{2}{3}z - 4.333$$

$$x=0 \rightarrow z = -\frac{1}{3}y - 2.333$$

$$P_2 = 14,48331 ; P_1 = 7$$

$$Q_2 = -7,2416 ; Q_1 = -3,5$$

$$R_2 = -4,82777 ; R_1 = -2,33$$

N.B. se avessimo richiesto il piano parallelo più vicino al centro assi l'equazione sarebbe

stata $x-2y-3z+(-7+2\sqrt{14})=0$ cioè:

$$\boxed{x-2y-3z + 0,48331 = 0}$$

5) Piano parallelo ad una data retta

La condizione di parallelismo è già stata discussa:

se la retta è espressa da: $\left(\frac{x-x_A}{e} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n} \right)$ oppure dalla coppia di piani: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ ed il

piano lo esprimiamo con:

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

avremo:

$$a_3l + b_3m + c_3n = 0$$

oppure:

$$a_3 \begin{vmatrix} l_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

questa seconda forma che esprime lo stesso concetto della prima equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

che abbiamo trattato all'inizio.

Ma tuttocio non basta per definire un piano, cioè trovare le tre incognite a_3/d_3 , b_3/d_3 , c_3/d_3 .

Non basta aggiungere che il piano sia passante per $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$, perché per B passa una retta parallela alla retta data ed asse del fascio di piani tutti paralleli alla retta data, meno quello che la contiene.

Il piano non è definito neppure se diciamo: distante "h" dalla retta data perché abbiamo l'insieme dei

piani tangenti al cilindro di raggio "h" di cui la retta data è asse. Quindi per formulare un problema possibile si dica:

"Date due rette sghembe r e s tracciare il piano passante per s e parallelo ad r ."

Per esempio se la retta $s \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$, abbiamo visto: (esercizio 4 pag 15) che l'equazione del fascio di piani è espressa da:

$$(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (3\lambda)z + 3 = 0$$

ora se la retta r è espressa da: $\frac{x-x_A}{e} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n}$ per il parallelismo dovrà essere:

$$(2+\lambda)e + (1-4\lambda)m + (3\lambda)n = 0$$

$$\lambda(e - 4m + 3n) = -(2e + m)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-(2e + m)}{(e - 4m + 3n)}}$$

e sostituendo λ nell'equazione del fascio di piani passanti per s , otteniamo l'equazione del piano che è anche parallelo ad r .

Se invece la retta r fosse data nella forma:

$r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ basterà risolvere il determi-

nante: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ (2+\lambda) & (1-4\lambda) & (3\lambda) \end{vmatrix} = 0$ in funzione di λ e sostituire come sopra detto.

6) retta parallela ad un piano dato

Come abbiamo già avvertito, il problema ammette infinite soluzioni, occorrono altri dati affinché la retta parallela sia determinata. Se imponiamo che passi per un punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ non basta, perché abbiamo tutte le rette del piano parallelo per B . Se imponiamo che la retta appartenga ad un piano non parallelo; non basta, perché abbiamo tutte le rette parallele alla retta comune ai due piani. In quest'ultima ipotesi basterà imporre una distanza h della retta dal piano cui è parallela.

Il problema potrà formularsi: "Dati due piani $\pi_1 \equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$; $\pi_2 \equiv (a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$ scrivere l'equazione della retta appartenente a π_1 , parallela a π_2 e distante da esso h . dalla parte più lontana dall'origine degli assi"

Utilizzando esercizi già fatti, troviamo il piano parallelo a π_2 e distante h da esso (dalla parte specificata), se π_3 è questo piano, la coppia di equazioni di π_1 e π_3 è l'equazione della retta richiesta.

Prima di affrontare un problema è sempre bene rendersi conto se ammette soluzioni determinate.

7) Retta parallela a due piani e passante per il punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

Siano: $\pi_1 \equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$

$\pi_2 \equiv (a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$

i due piani dati; la retta richiesta avrà i coseni direttori proporzionali a: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;
perciò l'equazione richiesta sarà:

$$\frac{(x - x_B)}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{(y - y_B)}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{(z - z_B)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

8) Piano perpendicolare ad altri due e passante per il punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$.

La retta comune ai due piani è retta di giacitura del piano cercato. La giacitura di tali piani sarà:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} Z - \delta \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = 0$$

ove δ = distanza dal centro assi è il valore parametrico se il piano deve passare per B

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x_B + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y_B + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z_B}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

sostituendo δ si ha:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} Z - \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x_B + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y_B + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z_B \right) = 0$$

che poteva scriversi:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} (x - x_B) + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} (y - y_B) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_B) = 0$$

9) equazione dell'insieme di piani perpendicolari a due piani dati.

Tenuto conto che la retta comune ai due piani : $\pi_1 \equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$ e $\pi_2 \equiv (a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$ è retta di giacitura per i piani perpendicolari ; detta δ la distanza dei singoli piani dall'origine ed assunta come parametro dell'equazione avremo:

$$\begin{bmatrix} |b_1, c_1| & |c_1, a_1| & |a_1, b_1| \\ |b_2, c_2| & |c_2, a_2| & |a_2, b_2| \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} |b_1, c_1|^2 & |c_1, a_1|^2 & |a_1, b_1|^2 \\ |b_2, c_2|^2 & |c_2, a_2|^2 & |a_2, b_2|^2 \end{bmatrix} Z + \delta \cdot \sqrt{|b_1, c_1|^2 + |c_1, a_1|^2 + |a_1, b_1|^2 + |b_2, c_2|^2 + |c_2, a_2|^2 + |a_2, b_2|^2} = 0$$

equazione che avevamo già scritta nell'esercizio 8).

10) equazione della giacitura di piani paralleli perpendicolari ad una retta, (retta di giacitura), espresso in forma canonica.

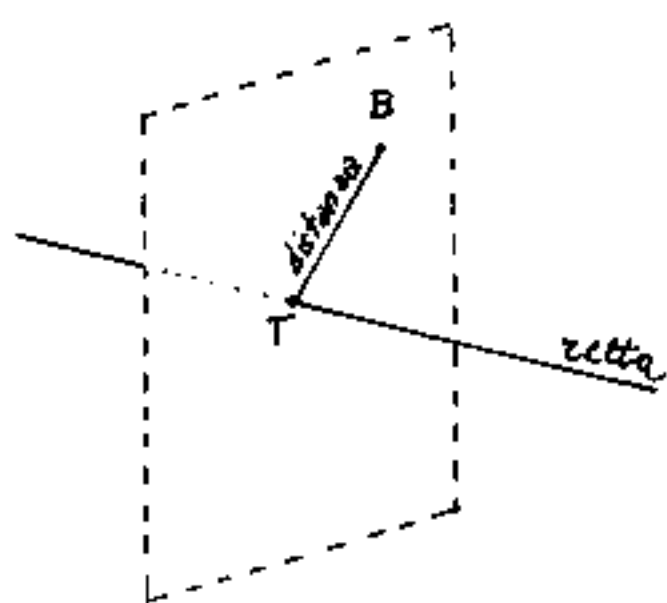
Esercizio analogo al precedente: sia δ la distanza di ciascun piano dall'origine degli assi, ed assumiamola come parametro dell'equazione, avremo:

$$lx + my + nz - \delta \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 0$$

che è l'equazione richiesta.

11) Distanza di un punto da una retta

La distanza di un punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ da una retta è misurata perpendicolarmente alla retta, cioè giace su un piano ad essa perpendicolare e passante per B.



Esercizio che abbiamo risolto, per

cui l'equazione del piano:

$$\frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} (x - x_B) + \frac{c_1 a_1}{c_2 a_2} (y - y_B) + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} (z - z_B) = 0$$

Interessa trovare le coordinate

del punto T di intersezione fra la

retta ed il piano ad essa perpendicolare, che sono determinate dall'intersezione di tre piani perciò:

$$\begin{vmatrix} \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} & \frac{c_1 a_1}{c_2 a_2} & \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}^2 + \frac{c_1 a_1}{c_2 a_2}^2 + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}^2 = \Delta$$

$$\frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} x_B + \frac{c_1 a_1}{c_2 a_2} y_B + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} z_B = \sqrt{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\Delta} & \frac{c_1 a_1}{c_2 a_2} & \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \\ -d_1 & b_1 & c_1 \\ -d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta x \rightarrow T_x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

analogamente:

$$T_y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad ; \quad T_z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

e la distanza

$$\overline{BT} = \sqrt{(x_B - x_T)^2 + (y_B - y_T)^2 + (z_B - z_T)^2}$$

12) Distanza di un punto da un piano

Tale distanza si misurerà sulla retta passante per il punto: $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$ e perpendicolare al piano $\pi \equiv (ax + by + cz + d = 0)$ tale retta sarà:

$$\boxed{\frac{(x - x_c)}{a} = \frac{(y - y_c)}{b} = \frac{(z - z_c)}{c}}$$

equazione che può scriversi:

$$\begin{cases} bx - ay + 0 = (bx_c - ay_c) \\ cx \quad 0 - az = (cx_c - az_c) \end{cases}$$

Il punto "T" di intersezione fra la retta ed il piano dato è comune ai tre piani, perciò:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & -a & 0 & b & -a \\ c & 0 & -a & c & 0 \\ a & b & c & a & b \end{vmatrix} = \boxed{a(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Delta x_T = \begin{vmatrix} (bx_c - ay_c) & -a & 0 \\ (cx_c - az_c) & 0 & -a \\ -d & b & c \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\Delta x_T}{\Delta} = \boxed{x_T = \frac{-da + (b^2 + c^2)x_c - bay_c - ca z_c}{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

$$\Delta y_T = \begin{vmatrix} b & (bx_c - ay_c) & 0 \\ c & (cx_c - az_c) & -a \\ a & -d & c \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\Delta y_T}{\Delta} = \boxed{y_T = \frac{-db + (a^2 + c^2)y_c - abx_c - bc z_c}{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

$$\Delta z_T = \begin{vmatrix} b & -a & (bx_c - ay_c) \\ c & 0 & (cx_c - az_c) \\ a & b & -d \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\Delta z_T}{\Delta} = \boxed{z_T = \frac{-cd + (a^2 + b^2)z_c - acx_c - bcy_c}{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

da queste possiamo ricavare:

$$(x_T - x_c) = \frac{-a(ax_c + by_c + cz_c + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$(y_T - y_c) = \frac{-b(ax_c + by_c + cz_c + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$(z_T - z_c) = \frac{-c(ax_c + by_c + cz_c + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

elevando a quadrato, sommando, ed estraendo la radice quadrata otteniamo la distanza $\overline{CT}$ del punto dal piano:

$$\overline{CT} = \frac{ax_c + by_c + cz_c + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Alla stessa formula si può giungere molto più rapidamente, considerando la distanza fra il piano dato ed il piano parallelo per C, che è data dalla differenza delle distanze dei due piani dall'origine degli assi: $\overline{CT} = \delta_1 - \delta_2$

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 \quad ; \quad \frac{a(x - x_c) + b(y - y_c) + c(z - z_c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$$\overline{CT} = (\delta_1 - \delta_c) = \frac{d - (-ax_c - by_c - cz_c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

che è la formula di cui sopra.

43) Piano parallelo ad una retta, e passante per il punto P, ove la distanza di P dalla retta sia minima rispetto a tutti gli altri punti del piano.

Questo esercizio prepara a comprendere il problema del segmento di minima distanza fra due rette sghembe. — Il punto $P \equiv (3, 1, -2)$ e la retta sia

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

L'equazione dei piani normali alla retta è:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} z + d = 0$$

cioè:

$$-x + 2y + 3z + 5\sqrt{14} = 0$$

dovendo passare per $P \equiv (3, 1, -2)$ avremo:

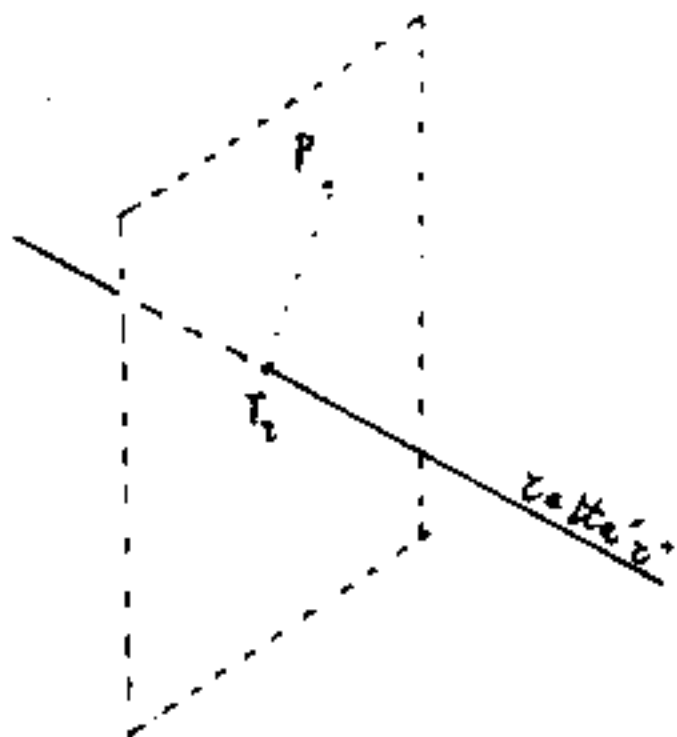
$$-3 + 2 - 6 + 5\sqrt{14} = 0$$

$$\delta = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

cambiando i segni:

$$x - 2y - 3z - 7 = 0$$

(Piano per P
⊥ ad r)



dal sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - 2y - 3z = +7 \end{cases} \quad \text{abbiamo le coordinate del punto di intersezione:}$$

$$x_{T_e} = -\frac{11}{14}; \quad y_{T_e} = \frac{-20}{14}; \quad z_{T_e} = \frac{-23}{14}$$

I coseni direttori della retta per "P" e per T_c essendo questa perpendicolare al piano cercato saranno anche i coseni del piano cercato

L'equazione della retta per due punti:

$$\frac{x-x_p}{x_{T_c}-x_p} = \frac{y-y_p}{y_{T_c}-y_p} = \frac{z-z_p}{z_{T_c}-z_p}$$

cioè:
$$\frac{(x-x_p)}{(-\frac{11}{14}-3)} = \frac{(y-y_p)}{(-\frac{20}{14}-1)} = \frac{(z-z_p)}{(-\frac{23}{14}+2)}$$

$$\boxed{\frac{(x-3)}{(-53)} = \frac{(y-1)}{(-34)} = \frac{(z+2)}{(+5)}}$$

perciò l'equazione del piano richiesto sarà:

$$53(x-3) + 34(y-1) - 5(z+2) = 0$$

$$\boxed{53x + 34y - 5z - 203 = 0}$$

Verifichiamo la condizione di parallelismo:

$$\boxed{al + bm + cn = 0}$$

$$53 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 34 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$53(-1) + 34(2) + -5(3) = 0$$

$$\boxed{-53 + 68 - 15 = 0} \text{ verificata.}$$

La distanza $\overline{PT_c} =$

$$\overline{PT_c} = \sqrt{\frac{53^2 + 34^2 + (-5)^2}{142}} = \frac{1}{14} \sqrt{3990} = 4,51..$$

Il parametro nell'equazione del fascio di piani

La retta comune, asse del fascio, sia rappresentata da: $\pi_1 \equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$ e $\pi_2 \equiv (a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$.
È evidente che anche π_1 e π_2 sono due piani del fascio.
L'equazione più generale del fascio è:

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)y + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)z + (\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) = 0$$

In questa equazione, ove ogni coefficiente è combinazione lineare dei coefficienti omonimi di π_1 e π_2 , figurano due parametri ciò è dovuto al fatto di voler includere nella formula entrambi i piani π_1 e π_2 . Infatti per $\lambda_2 = 0$, si ha π_1 per qualunque valore di λ_1 ; viceversa per $\lambda_1 = 0$, si ha π_2 per qualunque valore di λ_2 . Però basta prendere un piano come riferimento (per esempio π_2 , cioè $\lambda_2 = 1$) ed avremo che l'equazione si riduce ad un solo parametro:

$$(\lambda_1 a_1 + a_2)x + (\lambda_1 b_1 + b_2)y + (\lambda_1 c_1 + c_2)z + (\lambda_1 d_1 + d_2) = 0$$

ove i coefficienti sono ancora combinazioni lineari dei coefficienti omonimi di π_1 e π_2 .

Nell'esercizio che noi abbiamo già svolto sul fascio di piani, abbiamo scritto l'equazione di un piano generico e le equazioni di π_1 e π_2 nella forma:

$$\left(\frac{a'}{d}\right)x + \left(\frac{b'}{d}\right)y + \left(\frac{c'}{d}\right)z + 1 = 0$$

in tal modo le incognite per definire un piano, erano ridotte a tre quindi risolvendo: $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ in funzione di $\frac{c}{d}$, nelle due equazioni di π_1 e π_2 , sostituendo nell'equazione del piano generico e chiamando $\lambda = \frac{c}{d}$ avevamo ottenuto:
$$(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (3\lambda)z + 3 = 0$$
 ove i piani $\pi_1 \equiv (x - y + z + 1 = 0)$ e $\pi_2 \equiv (x + 2y - z + 2 = 0)$.

Anche la nostra equazione generale può essere ridotta ad avere λ solo nei coefficienti a, b, c , infatti:

$$\left(\frac{\lambda_1 a_1 + a_2}{\lambda_1 d_1 + d_2} \right) x + \left(\frac{\lambda_1 b_1 + b_2}{\lambda_1 d_1 + d_2} \right) y + \left(\frac{\lambda_1 c_1 + c_2}{\lambda_1 d_1 + d_2} \right) z + 1 = 0$$

Ma è più pratica la forma precedente. Riduciamo ora π_1 e π_2 alla forma:

$$\cos \alpha_1 x + \cos \beta_1 y + \cos \gamma_1 z + \delta_1 = 0 ; \cos \alpha_2 x + \cos \beta_2 y + \cos \gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

sostituendo

$$(\lambda_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) x + (\lambda_1 \cos \beta_1 + \cos \beta_2) y + (\lambda_1 \cos \gamma_1 + \cos \gamma_2) z + (\lambda \delta_1 + \delta_2) = 0$$

ma:

$$\left. \begin{aligned} &\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \lambda_1 \\ &\lambda_1^2 \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + 2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \lambda_1 \\ &\lambda_1^2 \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + 2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \lambda_1 \end{aligned} \right\} = \boxed{\lambda_1^2 + 1 + 2 \lambda \cos(\theta)}$$

ove θ è l'angolo diedro fra π_1 e π_2 .

quindi:

$$\left(\frac{\lambda_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2 \lambda \cos \theta}} \right) x + \left(\frac{\lambda_1 \cos \beta_1 + \cos \beta_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2 \lambda \cos \theta}} \right) y + \left(\frac{\lambda_1 \cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2 \lambda \cos \theta}} \right) z + \delta = 0$$

Questa formula ci consente di scegliere, fra i piani del fascio quello che dista δ dall'origine degli assi infatti:

$$\delta = \frac{\lambda_1 \delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1 \cos \theta}}$$

$$\delta^2 \lambda_1^2 + \delta^2 + 2\lambda_1 \delta^2 \cos \theta = \lambda_1^2 \delta_1^2 + 2\lambda_1 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2$$

$$[(\delta^2 - \delta_1^2) \lambda_1^2 - 2(\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \cos \theta) \lambda_1 - (\delta_2^2 - \delta^2)] = 0$$

$$\lambda = \left(\frac{\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \cos \theta}{\delta^2 - \delta_1^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \cos \theta}{\delta^2 - \delta_1^2} \right)^2 + \frac{\delta_2^2 - \delta^2}{\delta^2 - \delta_1^2}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \cos \theta}{\delta^2 - \delta_1^2} \right) \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2 \delta_2^2 + \delta^4 \cos^2 \theta - 2\delta^2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 \delta^2 - \delta_1^2 \delta^2 - \delta^4 + \delta_1^2 \delta^2}{(\delta^2 - \delta_1^2)^2}}$$

$$\lambda = \frac{(\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \cos \theta) \pm \sqrt{\delta^2(\delta_1^2 + \delta_2^2) - \delta^4 \sin^2 \theta - 2\delta^2 \delta_1 \delta_2}}{(\delta^2 - \delta_1^2)}$$

$$\lambda = \frac{(\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \cos \theta) \pm \delta \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1 \delta_2 - \delta^2 \sin^2 \theta}}{(\delta^2 - \delta_1^2)}$$

$$\lambda = \frac{(\delta_1 \delta_2 - \delta \cos \theta) \pm \delta \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 - \delta^2 \sin^2 \theta}}{(\delta^2 - \delta_1^2)}$$

Noto λ , basta sostituirlo nell'equazione del piano.

λ può essere determinato anche assegnando al piano un particolare coseno direttore alla giacitura:

$$\cos \alpha = \left(\frac{\lambda \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1 \cos \theta}} \right); \quad \cos \beta = \frac{\lambda \cos \beta_1 + \cos \beta_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1 \cos \theta}}; \quad \text{infine:}$$

$$\cos \gamma = \left(\frac{\lambda_1 \cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1 \cos \theta}} \right). \quad \text{Facciamo un esempio.}$$

15) Piano passante per una retta s e parallelo ad una retta r

sia: $s \equiv \left(\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+30}{28} \right)$

sia: $r \equiv \left(\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \right)$ $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \Delta$

Possiamo scrivere l'equazione dei piani paralleli ad r, e fra essi trovare il piano passante per s. Oppure possiamo scrivere l'equazione del fascio di piani per s e poi trovare il piano parallelo ad r. Seguiremo questa seconda sequenza.

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 28y - z - 30 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} T_1 = (\frac{43}{7}, \frac{15}{14}, 0) ; T_2 = (1, 0, -30) \\ T_3 = (0, -\frac{1}{2}, -44) \end{matrix}$$

moltiplicando per λ la prima equazione e sommando la seconda

da si ha: $\boxed{(\lambda)x + (28-2\lambda)y - z - (30+\lambda) = 0}$ equazione del fascio

I coseni direttori della retta r sono:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{1}{\Delta} ; \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2}{\Delta} ; \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{3}{\Delta}$$

per la condizione di parallelismo:

$$\boxed{(\lambda)(-1) + (28-2\lambda)(2) + (-1)(3) = 0}$$

$$5\lambda = (56-3) \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{53}{5} = 10,6}$$

sostituendo $\lambda = \frac{53}{5}$ e moltiplicando per 5 si ha:

$$\boxed{(53)x + (34)y - (5)z - 203 = 0}$$
 equazione del piano richiesto.

verifichiamo che il piano passa per due punti della s (Tienece T_2, T_3)

$$53 + (-5)(-30) - 203 = 0 ; (+34)(-\frac{1}{2}) + (-5)(-44) - 203 = 0 ; \text{ Verificato.}$$

1) Piano passante per la retta r e perpendicolare al piano π_1 .

$$\text{sia } r = \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\pi_1 \equiv (53x + 34y - 5z - 203 = 0)}$$

Notiamo che, per l'esercizio precedente, la retta r ed il piano π_1 sono paralleli.

Moltiplicando per λ la prima equazione della retta r , e sommando la seconda si ha:

$$\boxed{(\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{l'equazione del} \\ \text{fascio di piani} \end{array} \right)$$

Per la condizione di perpendicolarità con π_1 (o di parallelismo con le rette di giacitura di π_1) si ha:

$$\boxed{(53)(\lambda+1) + (34)(-\lambda+2) + (-5)(\lambda-1) = 0}$$

La condizione è con tutta la giacitura di piani paralleli a π_1 , perciò è indipendente da δ .

$$\text{Risolvendo: } \lambda(53-34-5) = (-53-68-5)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-126}{14} = -9}$$

$$\boxed{(8)x - (11)y + (10)z + 7 = 0} \quad \text{equazione del piano richiesto}$$

Verifiche: due punti della retta sono: $M \equiv (-1, -1, -1)$
 $N \equiv (-2, 1, 2)$

$$M \rightarrow -8 + 11 - 10 + 7 = 0$$

$$N \rightarrow -16 - 11 + 20 + 7 = 0$$

verificato

La retta $\begin{cases} 8x - 11y + 10z + 7 = 0 \\ 53x + 34y - 5z - 203 = 0 \end{cases}$ è parallela alla retta data r .

1) Distanza fra due rette parallele

$$\text{Siano: } \mathcal{L}_1 = \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = \begin{cases} 8x - 11y + 10z + 7 = 0 \\ 53x + 34y - 5z - 203 = 0 \end{cases}$$

le rette date.

Verifichiamo, prima di tutto, il parallelismo.

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ +2 & -1 \end{vmatrix} = -1}{\begin{vmatrix} -11 & 10 \\ 34 & -5 \end{vmatrix} = -285} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +2}{\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ -5 & 53 \end{vmatrix} = +510} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3}{\begin{vmatrix} 8 & -11 \\ 53 & 34 \end{vmatrix} = 855} \quad \text{verificato.}$$

Un piano ad esse perpendicolare, per esempio passante per l'origine degli assi, sarà:

$$\boxed{x - 2y - 3z = 0}$$

cerchiamo il punto comune di questo piano con la I^a retta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 3 = 18 \quad x_1 = \frac{18}{-14} = -\frac{9}{7}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & +2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 8 = +6 \quad y_1 = \frac{+6}{-14} = -\frac{3}{7}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & +1 & -1 \\ 1 & +4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 = +2 \quad z_1 = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

cerchiamo il punto comune di questo piano con la II^a retta

$$\begin{vmatrix} 8 & -11 & 10 \\ 53 & 34 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & +5 & 34 \\ 53 & +140 & +154 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 770 - 4760 = -3990.$$

$$\begin{vmatrix} -7 & -11 & 10 \\ +203 & 34 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -11 & 10 \\ 0 & -285 & +285 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = +1425(-7) \quad x_2 = \frac{-9975}{-3990} = \frac{5}{2} = +2,5$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -7 & 10 \\ 53 & 203 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 & 34 \\ 53 & 203 & +154 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1078 - 6902 = -7980 \quad y_2 = \frac{-7980}{-3990} = +2$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -11 & -7 \\ 53 & 34 & 203 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -7 \\ 53 & 140 & 203 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1015 - 180 = 835 \quad z_2 = \frac{+835}{-3990} = -\frac{1}{2}$$

La distanza $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$d = \sqrt{\left(2,5 + \frac{9}{7}\right)^2 + \left(2 + \frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)^2}$$

$$d = \frac{1}{7} \sqrt{(702,25) + (289) + (6,25)}$$

$$d = \frac{1}{7} \sqrt{997,5} =$$

$$d = 4,51189$$

In questo genere di esercizi è molto facile commettere errori di calcolo, perciò si consiglia di controllare elemento per elemento con modellini o disegni in scala.

18) Piano passante per due rette parallele.

Le rette siano quelle dell'esercizio precedente;

avremo: $(\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0$ l'equazione del fascio passante per la I° retta; poiché:

$P \equiv (2,5, 2, -0,5)$ è un punto della seconda retta

$$(\lambda+1)2,5 + (-\lambda+2)2 + (\lambda-1)(-0,5) + (\lambda+2) = 0$$

$$\lambda(2,5 - 2 - 0,5 + 1) = (-2,5 - 4 - 0,5 - 2)$$

$$\boxed{\lambda = -9}$$

$$\boxed{8x - 11x + 10z + 7 = 0}$$
 è l'equazione

del piano passante per le due rette parallele

19) Piano passante per la I° retta e perpendicolare a: $\pi_2 \equiv (8x - 11x + 10z + 7) = 0$

$$(8+11+10)\lambda \equiv (-8+22+10) \quad \boxed{\lambda = \frac{24}{29}}$$

$$(24+29)x + (-24+58)y + (24-39)z + 24+58 = 0$$

$$\boxed{53x + 34y - 5z + 82 = 0}$$

l'altro piano parallelo passante per la II° retta è

$$\boxed{53x + 34y - 5z - 203 = 0}$$

La distanza fra i due piani sarà:

$$d = \frac{82+203}{\sqrt{53^2 + 34^2 + (-5)^2}} = \frac{285}{\sqrt{3990}}$$

$$\boxed{d = 4,51189..}$$

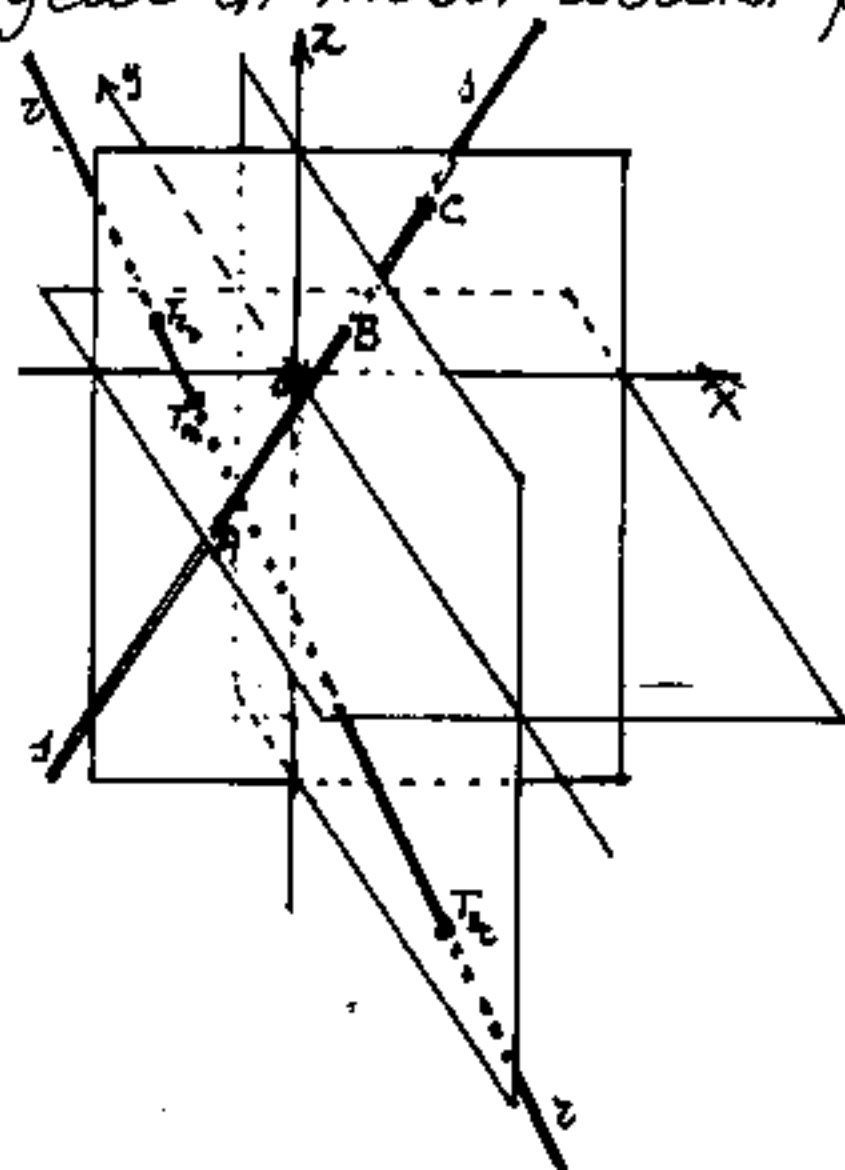
che verifica la distanza fra le due rette parallele.

Coppia di piani paralleli passanti per due rette sghembe.

Siano: $\mathcal{r} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{array} \right\}$

$$\mathcal{s} \equiv \left(\frac{x+1,5}{0+1,5} = \frac{y+2}{-1+2} = \frac{z-0}{1-0} \right)$$

Le due rette sghembe. La prima retta è stata oggetto di molti esercizi precedenti, la seconda è una



retta passante per i punti

$$A \equiv (-1,5, -2, 0)$$

$$B \equiv (0, -1, +1)$$

e quindi:

$$C \equiv (1,5, 0, 2)$$

ove A, B, C; sono le tracce della retta s. Le tracce di $\mathcal{r}$ le conosciamo:

$$T_{1\mathcal{r}} \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); T_{2\mathcal{r}} \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right); T_{3\mathcal{r}} \equiv (0, -3, -4)$$

La seconda retta può essere rappresentata da

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 0 - (1,5)z + (1,5) = 0 \\ x - 1,5y + 0 - 1,5 = 0 \end{array} \right\} \equiv \mathcal{s}$$

Il fascio di piani passanti per $\mathcal{r}$ è

$$(\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0$$

affinchè sia parallelo ad $\mathcal{s}$, dovrà essere:

$$(1,5 - 1 + 1)\lambda = (-1,5 - 2 + 1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2,5}{1,5} = -\frac{5}{3}$$

$$(-5+3)x + (5+6)y + (-5-3)z + (-5+6) = 0$$

$$\boxed{2x - 11y + 8z - 1 = 0}$$

equazione del piano per z , parallelo ad s . Analogamente: $(\lambda+1)x - (1,5)y - (1,5\lambda)z + (1,5\lambda - 1,5) = 0$ è l'equazione del fascio per s .

Sappiamo che i coseni direttori di z sono proporzionali a $(-1; 2; 3)$ per cui

$$+\lambda(-1+0-4,5) = (1+3+0)$$

$$\lambda = \frac{4}{-5,5} = \left(-\frac{8}{11}\right)$$

$$(-8+11)x - (1,5)(11)y + (12)z - 12 - (1,5)(11) = 0$$

$$\boxed{3x - 16,5y + 12z - 28,5 = 0}$$

che i due piani sono paralleli si può vedere

da $\left(\frac{2}{3} = \frac{-11}{16,5} = \frac{8}{12}\right)$
possono scriversi:

$$6x - 33y + 24z - 3 = 0$$

$$6x - 33y + 24z - 57 = 0$$

perciò la distanza fra i due piani (che è anche la minima distanza fra le due rette sghembe) sarà:

$$d = \frac{57-3}{\sqrt{6^2+33^2+24^2}} = \frac{54}{\sqrt{1701}} = 1,30931$$

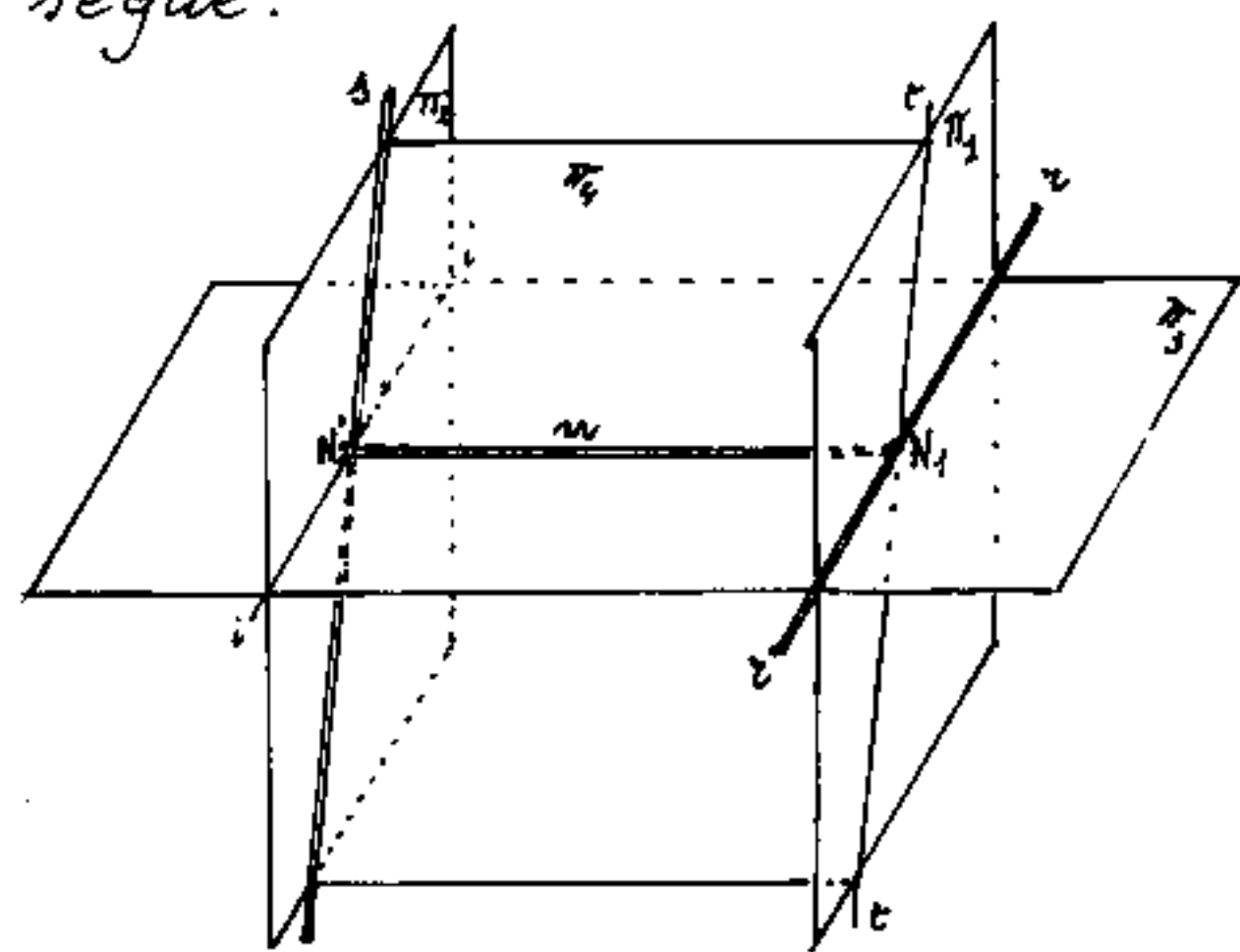
Segmento di minima distanza fra due rette sghembe.

Mentre per conoscere la minima distanza fra due rette sghembe, è sufficiente conoscere la distanza della coppia di piani paralleli che le contiene; (v. es. prec.); per trovare il segmento di minima distanza, occorre trovare la retta perpendicolare ad entrambe le rette sghembe, sulla quale è il segmento di minima distanza. Questo problema (che ritroveremo identico in geometria descrittiva) si risolve come segue:

Siano " r " ed " s " le due rette sghembe, e sia π_1 il piano per " r " parallelo ad " s "; e π_2 il piano per " s " parallelo ad " r ".

Se per " r " tracciamo un piano

π_3 perpendicolare a π_2 ; la coppia di piani π_2 e π_3 avrà in comune una retta " i ", che incontra in N_2 la retta " s ". Se per " s " tracciamo un piano π_4 perpendicolare a π_1 ; la coppia π_1 e π_4 avrà in comune la retta " t ",



che incontra in N_1 la "r". Il segmento $\overline{N_1 N_2}$ è il segmento di minima distanza fra le rette sghembe "r" ed "s". La retta "n", che lo contiene, è la retta comune ai piani π_3 e π_4 , che essendo perpendicolari alla coppia di piani paralleli π_1 e π_2 , contenenti le rette sghembe "r" ed "s", anche la loro retta comune "n" è perpendicolare a π_1 e π_2 e poiché "n" è una volta complanare con "r" su π_3 ed una volta complanare con "s" su π_4 , si può affermare che la retta "n" è normale ad entrambe le rette sghembe.

Esempio numerico

$$\text{Siano: } \mathcal{L} \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} \equiv \left(\frac{x+1.5}{1.5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \right)$$

Calcoliamo π_1 per $\mathcal{L}$ parallelo ad s .

Il fascio per $\mathcal{L} \equiv ((\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0)$ per la condizione di parallelismo con s .

$$(\lambda+1)(1.5) + (-\lambda+2)(1) + (\lambda-1)(1) = 0$$

$$\text{cioè: } \lambda(1.5 - 1 + 1) = (-1.5 - 2 + 1) \Rightarrow \lambda = \frac{-2.5}{1.5} = -\frac{5}{3}$$

sostituendo:

$$(-5+3)x + (+5+6)y + (-5-3)z + (-5+6) = 0$$

$$\boxed{\pi_1 \equiv (2x - 11y + 8z - 1 = 0)}$$

calcoliamo π_2 per "s" parallelo ad z
 s può rappresentarsi:

$$s \equiv \begin{cases} x - 1,5z = -1,5 \\ x - 1,5y = 1,5 \end{cases}$$

Il fascio di piani per s sarà:

$$(\lambda + 1)x + (-1,5)y + (-1,5\lambda)z + (1,5\lambda - 1,5) = 0$$

per il parallelismo con "z" avremo:

$$(\lambda + 1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1,5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1,5\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 1)(-1) + (-1,5)(2) + (-1,5\lambda)(3) = 0$$

$$\lambda(-1 - 4,5) + (-1 - 3) = 0 \quad \lambda = \frac{4}{-5,5} ; \left(\lambda = \frac{-8}{11} \right)$$

sostituendolo:

$$(-8 + 11)x + (-1,5)(11)y + (-1,5)(8)z + ((1,5)(8) + (-1,5)(11)) = 0$$

$$\boxed{\pi_2 \equiv (3x - (16,5)y + (12)z - (28,5) = 0)}$$

Questi due piani sono paralleli infatti; moltiplicando per $\frac{2}{3}$ l'espressione di π_2 si ha:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv (2x - 11y + 8z - 1 = 0) \\ \pi_2 \equiv (2x - 11y + 8z - 19 = 0) \end{cases}$$

hanno gli stessi coseni direttori:

$$\sqrt{2^2 + 11^2 + 8^2} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21} :$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3\sqrt{21}} ; \cos \beta = \frac{-11}{3\sqrt{21}} ; \cos \gamma = \frac{8}{3\sqrt{21}} ; \delta_1 = \frac{-1}{3\sqrt{21}} ; \delta_2 = \frac{-19}{3\sqrt{21}}$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{18}{\sqrt{21}} = 4,30931 .$$

calcoliamo ora π_3 passante per "r" e perpendicolare a π_2 . Dall'equazione del fascio per "r" per la perpendicolarità con π_2 (e quindi anche con π_1) avremo:

$$(\lambda+1)(2) + (-\lambda+2)(-11) + (\lambda-1)8 = 0$$

$$\lambda(2+11+8) + (2-22-8) = 0 \quad \lambda = \frac{+28}{21} = \frac{4}{3}$$

sostituendo:

$$(4+3)x + (-4+6)y + (4-3)z + (4+6) = 0$$

$$\boxed{\pi_3 \equiv [7x + 2y + z + 10] = 0}$$

Calcoliamo π_4 passante per "s" e perpendicolare a π_1 ; dall'equazione del fascio per "s", la condizione di perpendicolarità fra piani:

$$(\lambda+1)2 + (-1,5)(-11) + (-1,5\lambda)8 = 0$$

$$\lambda(2-12) + (2+16,5) = 0 \quad \lambda = \frac{-18,5}{-10} = 1,85 = \frac{37}{20}$$

sostituendo:

$$(37+20)x - (1,5)(20)y - (1,5)(37)z + (1,5)(37) - (1,5)(20) = 0$$

$$(57)x - (30)y - (55,5)z + 25,5 = 0$$

$$\boxed{\pi_4 \equiv [114x - 60y - 111z + 51] = 0}$$

La coppia di piani π_3 e π_4 hanno in comune la retta "n" perpendicolare alle due rette sghembe: "r" e "s". Il loro angolo diedro è l'angolo delle direzioni di "r" e "s".

abbiamo detto "direzioni" perché $\vec{r}$ e $\vec{s}$ non sono complanari. Se φ è tale angolo:

$$\cos \varphi = (\cos \alpha_3 \cos \alpha_4 + \cos \beta_3 \cos \beta_4 + \cos \gamma_3 \cos \gamma_4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{7^2 + 2^2 + 1^2} &= \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \\ \sqrt{114^2 + 60^2 + 111^2} &= \sqrt{28917} = 9\sqrt{357} \end{aligned} \right\} 3\sqrt{6} \cdot 9\sqrt{357} = 27\sqrt{2142} = 81\sqrt{238}$$

$$\cos \varphi = \frac{(7)(114) - (2)(60) - 1(111)}{81\sqrt{238}} = \frac{+567}{81\sqrt{238}}$$

$$\cos \varphi = \frac{7}{\sqrt{238}} = \sqrt{\frac{7}{34}} = 0,45374 \rightarrow \varphi = 63^\circ.00'.57''$$

Calcoliamo ora i punti N_1 ed N_2 estremi del segmento di minima distanza delle rette sghembe $\vec{r}$ ed $\vec{s}$. N_1 è comune ai piani: Π_1, Π_3, Π_4 mentre N_2 è comune ai piani: Π_2, Π_3, Π_4 .

$$N_1 \equiv \begin{cases} 2x - 11y + 8z = 1 \\ 7x + 2y + 1z = -10 \\ 114x - 60y - 111z = -51 \end{cases}; \quad N_2 \equiv \begin{cases} 2x - 11y + 8z = 19 \\ 7x + 2y + 1z = -10 \\ 114x - 60y - 111z = -51 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti è lo stesso:

$$\begin{vmatrix} 2 & -11 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \\ 114 & -60 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & +40,5 & -27 \\ 114 & +567 & -567 \end{vmatrix} = -15.309, =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & 8 \\ -10 & 2 & 1 \\ -51 & -60 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & -108 & +81 \\ -51 & -621 & +297 \end{vmatrix} = +18225, =$$

$$\text{per cui } X_1 = \frac{18225}{-15309} = \underline{\underline{1,19048}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 1 \\ 114 & -51 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -10 & 81 \\ 216 & -51 & 297 \end{vmatrix} = -9477(-1)$$

$$y_{N_1} = \frac{+9477}{-15309} = \underline{\underline{-0,61905}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ 7 & 2 & -10 \\ 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 27 & -108 & -10 \\ 216 & -621 & -51 \end{vmatrix} = 6561$$

$$z_{N_1} = \frac{6561}{-15309} = \underline{\underline{-0,42857}}$$

$$\begin{vmatrix} 19 & -11 & 8 \\ -10 & 2 & 1 \\ -51 & -60 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 99 & -27 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1161 & +162 & -111 \end{vmatrix} = +15309$$

$$x_{N_2} = \frac{+15309}{-15309} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 19 & 8 \\ 7 & -10 & 1 \\ 114 & -51 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -54 & 99 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ +891 & -1161 & -111 \end{vmatrix} = 25515$$

$$y_{N_2} = \frac{25515}{-15309} = \underline{\underline{-\frac{5}{3}}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -11 & 19 \\ 7 & 2 & -10 \\ 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 7 & 2 & -10 \\ 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & -17 \\ 114 & 54 & -165 \end{vmatrix} = -5103$$

$$z_{N_2} = \frac{-5103}{-15309} = \underline{\underline{+\frac{1}{3}}}$$

$$(x_{N_2} - x_{N_1})^2 = \left(\frac{15309 - 18225}{(-15309)} \right)^2 = \frac{(2916)^2}{(15309)^2} = \frac{8503056}{(15309)^2}$$

$$(y_{N_2} - y_{N_1})^2 = \frac{(25515 - 9477)^2}{(-15309)^2} = \frac{(16038)^2}{(15309)^2} = \frac{257217444}{(15309)^2}$$

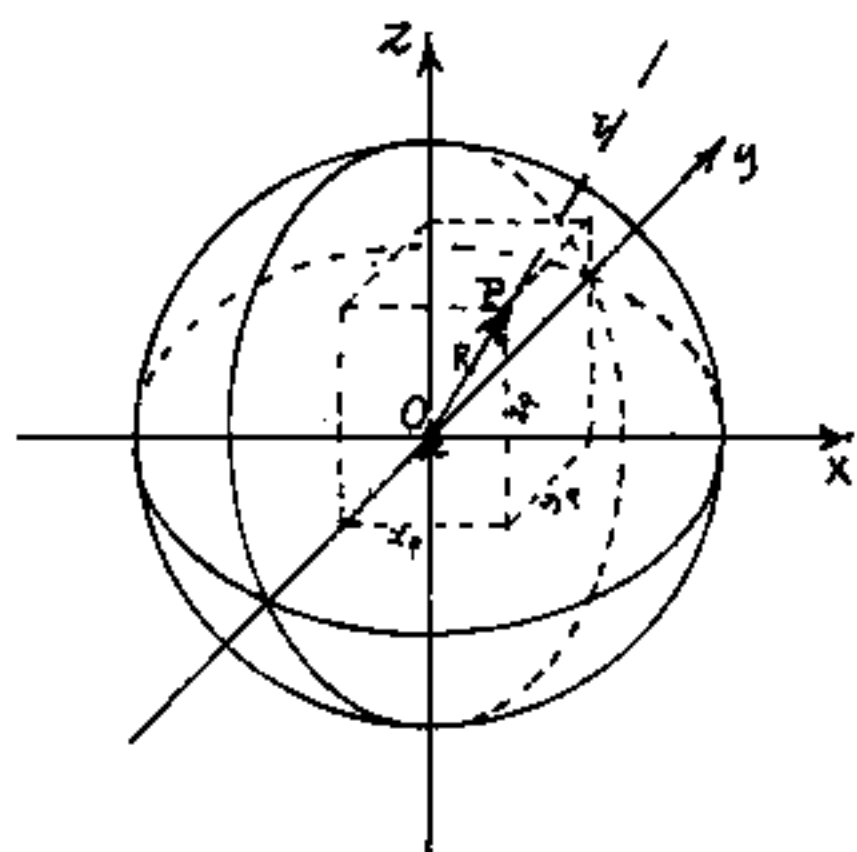
$$(z_{N_2} - z_{N_1})^2 = \frac{(-5103 - 6561)^2}{(15309)^2} = \frac{(11664)^2}{(15309)^2} = \frac{136048896}{(15309)^2}$$

$$\delta = \overline{N_1 N_2} = \frac{\sqrt{401769396}}{15309} = \frac{20044,19}{15309} = \underline{\underline{1,30931}}$$

Le superfici elementari come luoghi geometrici

La Sfera

"Luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto "C" detto centro." (definisce la superficie sferica)



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Equazione dei punti della superficie di una sfera al centro assi. ($R = \text{raggio}$)

Ad ogni punto della superficie sferica, corrisponde una

direzione $\vec{OP}$ ove: $|\vec{OP}| = R$ per cui:

$$R \cos(\hat{x}\hat{r}) = x_p ; \quad R \cos(\hat{y}\hat{r}) = y_p ; \quad R \cos(\hat{z}\hat{r}) = z_p ;$$

Quindi il piano tangente in P alla sfera, avrà per

equazione: $\frac{x_p}{R}(x - x_p) + \frac{y_p}{R}(y - y_p) + \frac{z_p}{R}(z - z_p) = 0$

$$x_p(x - x_p) + y_p(y - y_p) + z_p(z - z_p) = 0$$

$$(x_p)x + (y_p)y + (z_p)z - (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) = 0$$

ma: $(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) =$

$$(x_p)x + (y_p)y + (z_p)z = R^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{eq. del piano tangente} \\ \text{alla sfera al centro assi} \end{array} \right)$$

L'equazione della retta "r" (di giacitura del piano) sarà:

$$\frac{x - x_p}{x_p} = \frac{y - y_p}{y_p} = \frac{z - z_p}{z_p}$$

Equazione generale della sfera

Sfera di centro: $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$

avrà per equazione:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

sviluppando i quadrati:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x_c x - 2y_c y - 2z_c z + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - R^2) = 0$$

l'espressione può essere moltiplicata per una costante "K" arbitraria; ma tale costante sarà il coefficiente di x^2 , di y^2 , di z^2 , per cui dividendo, l'equazione assume
rà la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

Equazione caratteristica della sfera, ove:

$$\begin{cases} x_c = -a/2 \\ y_c = -b/2 \\ z_c = -c/2 \end{cases}$$

sono le coordinate del centro C

$$R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - d}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$$

R = raggio della sfera può esprimersi: $R = \frac{1}{2} \sqrt{(\overline{oc})^2 - 4d}$

ove: $\overline{oc}$ è la distanza del centro sfera dal centro assi.

Notiamo che ogni equazione riducibile alla forma (1) rappresenta una sfera, e dai coefficienti dell'equazione è facile ricavare gli elementi della sfera.

Equazione del piano tangente in P alla sfera

Anche qui, (come nell'equazione al centro assi), ad ogni punto P della superficie sferica corrisponde una direzione $\vec{CP}$ ove: $|\vec{CP}| = R$; per cui:

$$\frac{(x_p - x_c)}{R} = \cos(\hat{x}\hat{r}); \quad \frac{(y_p - y_c)}{R} = \cos(\hat{y}\hat{r}); \quad \frac{(z_p - z_c)}{R} = \cos(\hat{z}\hat{r})$$

Quindi l'equazione del piano tangente in P una sfera di centro: $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$ e raggio $R = \vec{CP}$, sarà:

$$(x_p - x_c)(x - x_p) + (y_p - y_c)(y - y_p) + (z_p - z_c)(z - z_p) = 0 \quad (1)$$

possiamo scrivere:

$$(1) \quad (x_p - x_c)x + (y_p - y_c)y + (z_p - z_c)z - (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) + x_c x_p + y_c y_p + z_c z_p = 0$$

Se consideriamo che: $R^2 = (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 + (z_p - z_c)^2$; cioè:

$$R^2 = (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2) - 2(x_c x_p + y_c y_p + z_c z_p)$$

$$(x_c x_p + y_c y_p + z_c z_p) - \overline{OP}^2 = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - R^2}{2} - \overline{OP}^2 = \frac{\overline{OC}^2 - \overline{OP}^2 - R^2}{2}$$

avremo:

$$(x_p - x_c)x + (y_p - y_c)y + (z_p - z_c)z - \left(\frac{R^2 + \overline{OP}^2 - \overline{OC}^2}{2} \right) = 0$$

dividendo questa per R si ha:

$$(\cos(\hat{x}\hat{r}))x + (\cos(\hat{y}\hat{r}))y + (\cos(\hat{z}\hat{r}))z - \delta = 0$$

ove $\delta = \left(\frac{R^2 + \overline{OP}^2 - \overline{OC}^2}{2R} \right) = \text{distanza del piano dal centro assi.} = \overline{ON}$

Le rette di giacitura: $\overline{ON}$ o $\overline{CP}$, (parallele), possono esprimersi in funzione delle coordinate di N o di P: $N \equiv (\delta \cos(\hat{x}\hat{r}), \delta \cos(\hat{y}\hat{r}), \delta \cos(\hat{z}\hat{r}))$.

Dall'equazione della sfera notiamo che i coefficienti indipendenti sono 4 : a, b, c, d ; quindi occorrono quattro condizioni, (equazioni) o correlazioni indipendenti per determinare una sfera.

Le condizioni possono essere:

- 1) Le tre coordinate del centro ed il raggio.
- 2) Le tre coordinate del centro e le tre coordinate di un punto sulla superficie sferica.
- 3) tre equazioni di tre piani tangenti alla sfera ed il raggio
- 4) Le coordinate di quattro punti sulla superficie sferica.
- 5) Vi sono molte altre condizioni che definiscono la sfera, noi vogliamo esaminare brevemente quelle sopra enunciate; ricordando che occorrono "4 equazioni" per determinare 4 coefficienti.

Dare un punto generico è una condizione.

Dare il centro vale tre condizioni, perciò dato il centro, basta un altro punto generico, oppure il raggio.

Dato il raggio è una condizione;

L'equazione di un piano tangente è una condizione

Ricordiamo anche che quattro incognite sono determinate da quattro equazioni lineari, o due eq. di 2° grado, o una eq. di 4° grado.

Sfera passante per quattro punti

Siano: 1, 2, 3, 4 i punti avremo con $i = \text{int}(1 \div 4)$
cioè: (i variabile per interi da 1 a 4)

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + ax_i + by_i + cz_i + d = 0$$

ove: x_i, y_i, z_i sono noti, ed a, b, c, d , incognite.

quindi il determinante dei coefficienti: e la colonna

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \left| \begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{array} \right| = \Delta \end{array} \quad \begin{array}{l} = \left| \begin{array}{c} -(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \\ -(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ -(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) \\ -(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2) \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dei termini noti, da sostituire} \\ \text{nei determinanti} \\ \text{delle incognite,} \end{array}$$

porteranno, una volta risolti alla determinazione dei coefficienti: $a = \frac{\Delta_a}{\Delta}$; $b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$; $c = \frac{\Delta_c}{\Delta}$; $d = \frac{\Delta_d}{\Delta}$; ed il problema è risolto.

Esempio numerico:

$$1 \equiv (1, 0, 2) \quad ; \quad 2 \equiv (0, 3, -1) \quad ; \quad 3 \equiv (2, 0, 1) \quad ; \quad 4 \equiv (1, 2, 0)$$

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 5 \quad ; \quad (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 10 \quad ; \quad (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) = 5 \quad ; \quad (x_4^2 + y_4^2 + z_4^2) = 5$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = -(-1)(-+4) = \Delta = -2$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = 5 \left| \begin{array}{ccc} 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = 5(-1)(2) = 0 \quad ; \quad a = \frac{+10}{-2} = +5$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right| = b \frac{-10}{-2} \quad ; \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right| = 2(-10+5) = -10 \quad ; \quad c = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 0 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (10+30)2 = +40$$

$$d = \frac{40}{-2} = -20$$

verifiche:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5x + 5y + 5z - 20 = 0$$

$$5 + 5 + 0 + 10 - 20 = 0 \quad (\text{bene})$$

$$10 + 0 + 15 - 5 - 20 = 0 \quad (\text{bene})$$

$$5 + 10 + 0 + 5 - 20 = 0 \quad (\text{bene})$$

$$5 + 5 + 10 + 0 - 20 = 0 \quad (\text{bene})$$

$$\left. \begin{aligned} x_c &= -a/2 = -5/2 \\ y_c &= -b/2 = -5/2 \\ z_c &= -c/2 = -5/2 \end{aligned} \right\} \text{coordinate del centro}$$

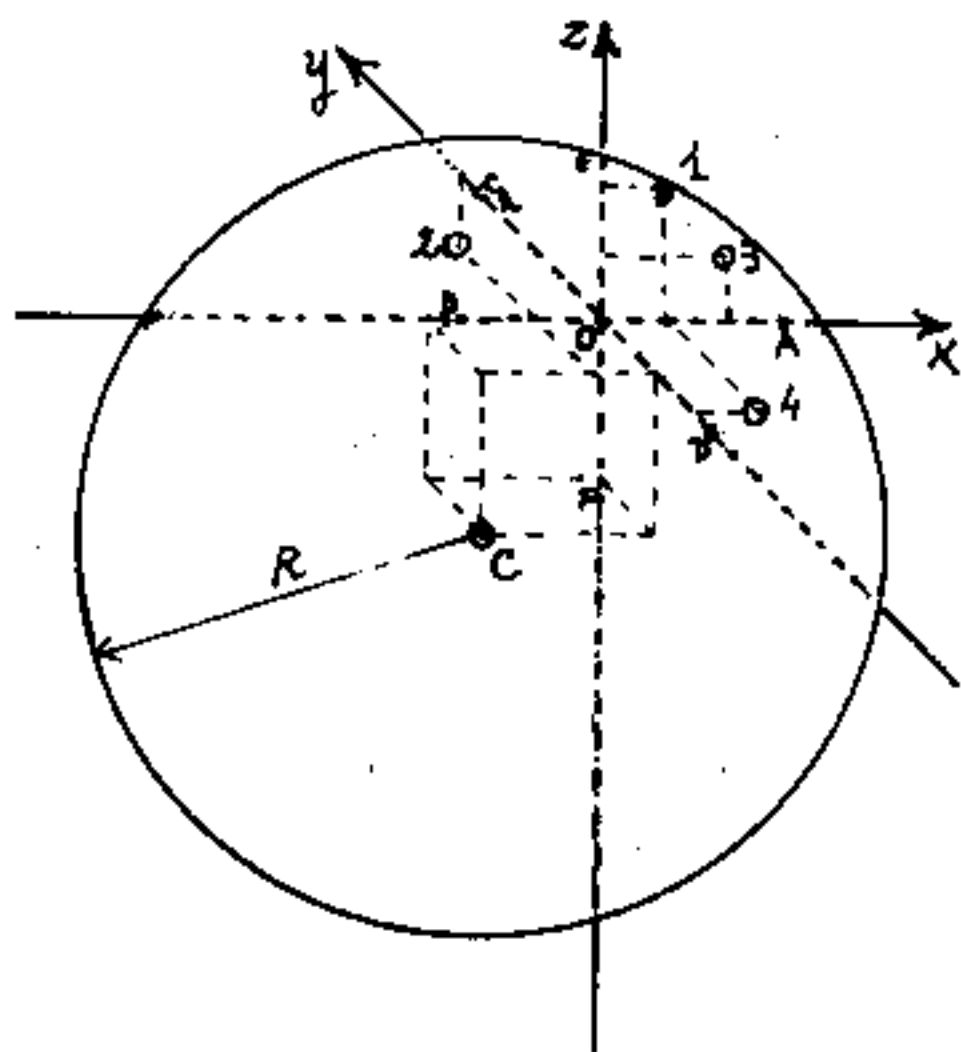
$$R = \sqrt{\frac{75}{4} + 20} = \frac{1}{2}\sqrt{155}$$

$$\underline{R = 6,22495}$$

Riportiamo un
grafico assonometrico
della sfera in scala:

$1 = 0,5 \text{ cm. in } x \text{ e } z.$

$1 = 0,25 \text{ cm in } y.$



(Si è indicata anche la
posizione dei punti 1, 2, 3, 4.)

I punti A, B, C, D, E, F sono le tracce degli assi sulla sfera.

Sfera di raggio R , passante per tre punti

I tre punti determinano un piano, e, come vertici di un triangolo, un cerchio circoscritto di raggio r . Il problema è possibile se $R \geq r$. Per $R < r$ il problema è impossibile.

Ma due sfere dello stesso raggio R possono avere in comune un cerchio di raggio $r < R$. Se: $r = R$ le due sfere sono coincidenti. Perciò in generale per $r < R$ si hanno due risoluzioni reali
per $r = R$ si ha una risoluzione reale
per $r > R$ non si hanno risoluzioni reali.

Quindi per avere una determinata risoluzione non basta sapere $r < R$, ma occorre sia noto da che parte del piano del triangolo si trova il centro C della sfera.

Esempio numerico

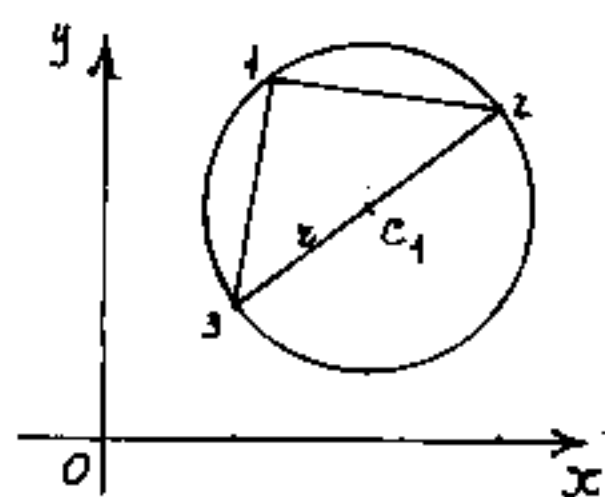
Se i tre punti sono: $(5, 11, 1)$; $(12, 10, 1)$; $(4, 4, 1)$ notiamo, (caso particolare) che tutti hanno: $(z=1)$ cioè la stessa quota, perciò: $(z=1)$ è anche l'equazione del piano che contiene il triangolo (e quindi il cerchio)

$$\text{lato } (1-2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(5-12)^2 + (11-10)^2} = \sqrt{50}$$

$$\text{lato } (1-3) = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (11-4)^2} = \sqrt{50}$$

$$\text{lato } (2-3) = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = \sqrt{(12-4)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{100} = 10 = (\sqrt{50})\sqrt{2}$$

I valori dei lati del triangolo ci dicono trattarsi di un triangolo isoscele che ha per base $h\sqrt{2}$ cioè metà quadrato, per cui $z = 10/2 = 5$; $x_{c_1} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{12 + 4}{2} = 8$; $y_{c_1} = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$.

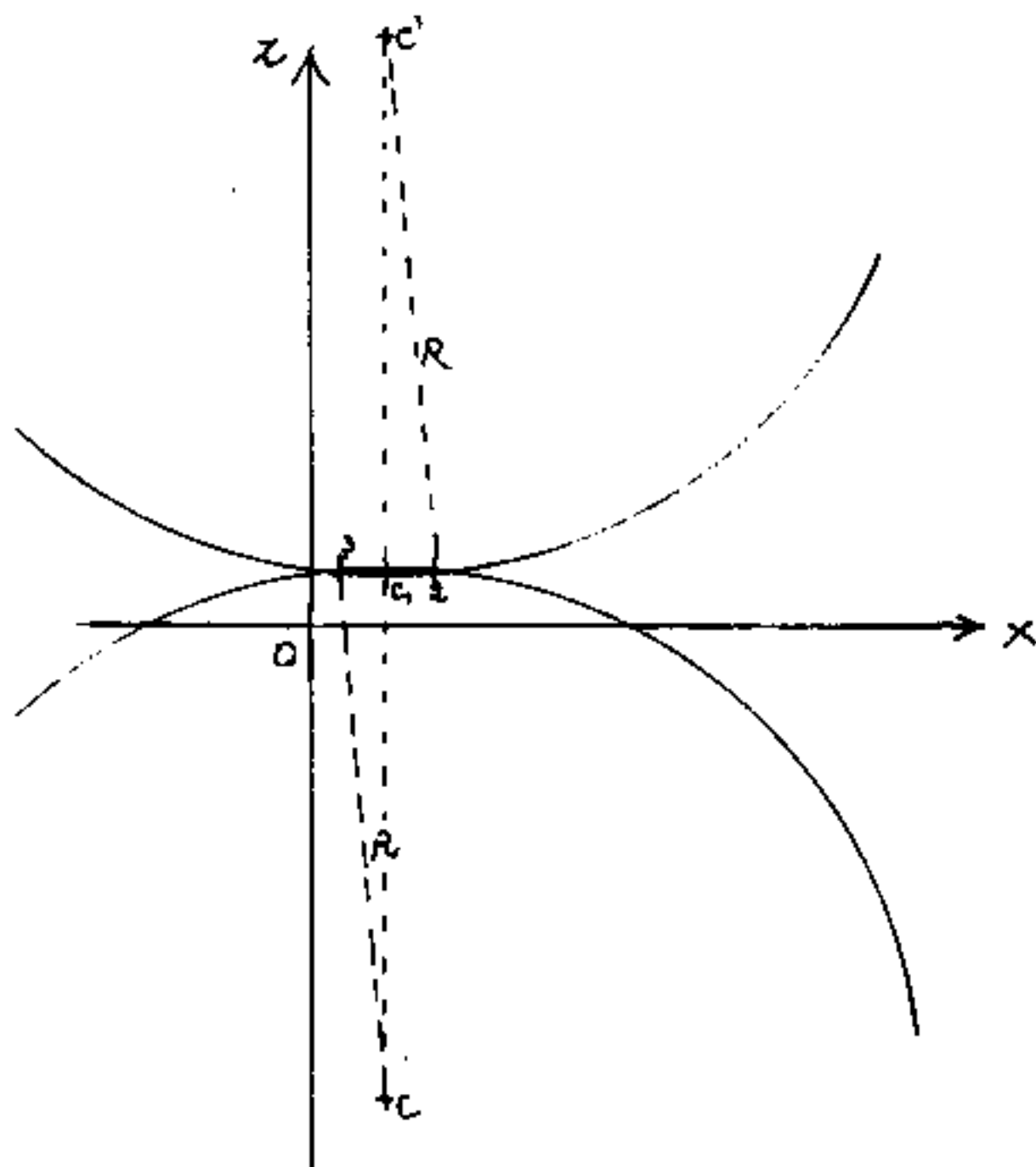


Agli stessi risultati saremmo pervenuti utilizzando il sistema:

$$\begin{cases} (5 - x_c)^2 + (11 - y_c)^2 = z^2 \\ (12 - x_c)^2 + (10 - y_c)^2 = z^2 \\ (4 - x_c)^2 + (4 - y_c)^2 = z^2 \end{cases}$$

Dovrà essere:

$$(z_{c_1} - z_c)^2 = R^2 - z^2 \quad \text{posto: } \underline{R=13} \quad (z_c - z_c) = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$



Come si vede dalla figura a fianco, le sfere che rispondono al problema sono due, quindi nella formulazione del problema, (se vogliamo che la risoluzione sia unica, occorre specificare per esempio che: $z_c > 0$, Quindi 3 punti ed il raggio non individuano una sfera, ma due.

Piani tangenti ad una sfera. (per un punto)

Abbiamo già scritto le equazioni del piano tangente in un punto P della superficie sferica, sia per sfere al centro, sia per sfere in posizione generica.

Se i piani tangenti debbono passare per un punto esterno alla sfera, gli infiniti piani tangenti inviluppano un cono, con vertice nel punto e circoscritto alla sfera.

Per un punto interno alla sfera non può esservi alcun piano tangente.

Esempio numerico:

Sia: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 2z + 1 = 0$, l'equazione della sfera, e sia: $P \equiv (5, 3, (\sqrt{20}-1))$ il punto

Dall'equazione della sfera si trovano le coordinate del centro: $C \equiv (3, 4, 1)$ ed il raggio: $R = 5$.

$$(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + (z_c - z_p)^2 \geq R^2 = 25$$

$(5-3)^2 + (3-4)^2 + (\sqrt{20}-1+1)^2 = 4+1+20 = 25 = R^2$ il punto è sulla superficie sferica, quindi l'equazione del piano

no tangente: $(x_p - x_c)(x - x_p) + (y_p - y_c)(y - y_p) + (z_p - z_c)(z - z_c) = 0$

$$2x - y + (\sqrt{20})z - (10 - 3 + 20 - \sqrt{20}) = 0$$

$$\boxed{2x - y + (\sqrt{20})z - (27 - \sqrt{20}) = 0}$$

Verifico che il piano passa per P .

$$2 \cdot 5 - 3 + (\sqrt{20})(\sqrt{20}-1) - 27 + \sqrt{20} = 0 \quad (\text{verificato})$$

Tracciamo per P la retta normale al piano (retta di giacitura che ha gli stessi coseni direttori del piano)

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{(-1)} = \frac{z-(\sqrt{20}-1)}{\sqrt{20}}$$

verifico che tale retta passa per $C \equiv (3, 4, -1)$

$$\frac{3-5}{2} = \frac{4-3}{(-1)} = \frac{-1-(\sqrt{20}-1)}{\sqrt{20}} = (-1) \quad (\text{verificato})$$

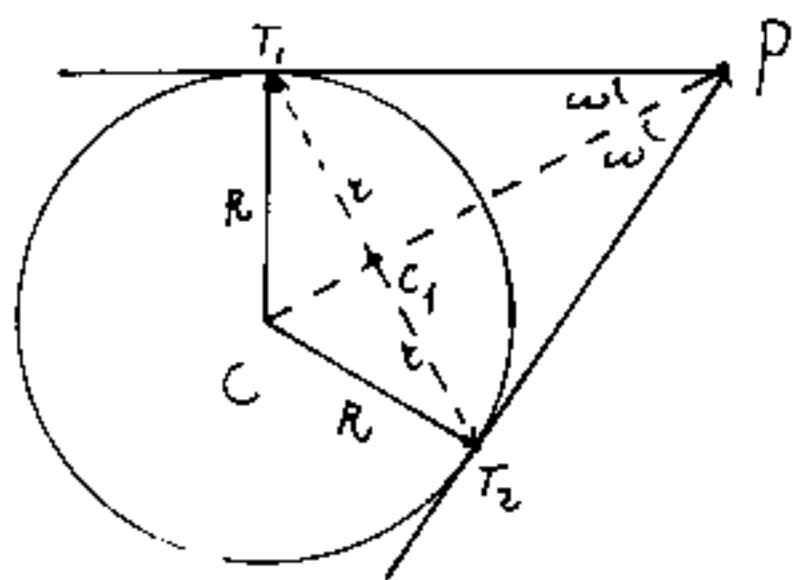
Quindi:

- 1) essendo P sulla sfera
- 2) il piano passa per P
- 3) la normale per P al piano passa anche per C

cioè il segmento $\overline{PC} = R$ è minimo, resta dimostrato

che il piano: $2x - y + (\sqrt{20})z - (3\sqrt{20} - \sqrt{20}) = 0$ è tangente alla sfera:

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 2z + 1 = 0$ nel punto $P \equiv (5, 3, (\sqrt{20}-1))$.



Qualora il punto "P" fosse esterno alla sfera, ogni piano che passa per $\overline{CP}$ presenta una sezione come la figura a fianco; dalla quale è possibile ricavare:

$\overline{CP} = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + (z_c - z_p)^2}$; $\overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2 = \overline{CP}^2 - R^2$;

l'equazione della retta $\overline{CP}$ (asse del cono contenente la sfera)

$CP \text{ asse} = \frac{(x-x_p)}{(x_c-x_p)} = \frac{(y-y_p)}{(y_c-y_p)} = \frac{(z-z_p)}{(z_c-z_p)}$; il raggio: $r = \frac{R \cdot \overline{CP}}{\overline{PT}}$;

la distanza $\overline{CC_1} = \sqrt{R^2 - r^2}$; i coseni direttori della retta

$CP \text{ asse}$: $\cos \alpha = \frac{x_c - x_p}{\overline{CP}}$; $\cos \beta = \frac{y_c - y_p}{\overline{CP}}$; $\cos \gamma = \frac{z_c - z_p}{\overline{CP}}$; e quindi le coordi-

nate di $C_1 \equiv (x_{c_1} = x_c + \overline{CC_1} \cos \alpha)$; $(y_{c_1} = y_c + \overline{CC_1} \cos \beta)$; $(z_{c_1} = z_c + \overline{CC_1} \cos \gamma)$

Quindi è possibile scrivere l'equazione del piano contenente il cerchio di raggio " r " e centro " C_1 " ottenuto come sezione con la sfera. La circonferenza, in tale sezione, è il luogo geometrico dei punti " T " di tangenza fra gli infiniti piani per " P " e la sfera. L'equazione del piano di cui sopra; (contenente quindi oltre C_1 anche i punti " T ") sarà:

$$(x_c - x_p)(x - x_c) + (y_c - y_p)(y - y_c) + (z_c - z_p)(z - z_c) = 0$$

Abbiamo visto che: $\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - R^2}$; l'insieme delle rette contenenti $\overline{PT}$, è l'equazione del cono di vertice " P ", asse " s ", ed angolo di apertura " 2ω " ove:

$$2\omega = \arcsen\left(\frac{R}{\overline{CP}}\right)$$

Possiamo anche scrivere:

$$(x - x_{c_1})^2 + (y - y_{c_1})^2 + (z - z_{c_1})^2 = r^2$$

che è l'equazione di una sfera di raggio r e centro C_1 e che unita all'equazione del piano di cui sopra è l'equazione della circonferenza, (luogo dei punti T).

Esempio numerico:

La sfera sia $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 2z + 1 = 0$ di cui sappiamo: $C \equiv (3, 4, -1)$; $R = 5$ e sia: $P \equiv (11, 4, 5)$.

La distanza $\overline{CP} = \sqrt{(3-11)^2 + (4-4)^2 + (-1-5)^2} = 10 > R = 5$ perciò il punto P è esterno alla sfera.

L'equazione della retta contenente $(\overline{CP})$ sarà:

$$\frac{(x-11)}{-8} = \frac{(y-4)}{0} = \frac{(z-5)}{-6}$$

(parallela al piano (zx) e può scriversi:

$$\begin{cases} z = \frac{3x}{4} - \frac{13}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

Le distanze: $\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - R^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Il raggio: $r = \frac{R \cdot \overline{PT}}{\overline{CP}} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{10} = \frac{5}{2}\sqrt{3} = 4,33 = r$

I coseni direttori di $\overline{CP}$ $\cos(\alpha) = \frac{-8}{10}$; $\cos(\beta) = \frac{0}{10}$; $\cos(\gamma) = \frac{-6}{10}$;

La distanza $\overline{CC_1} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2,5$

Le coordinate di C_1 : $x_{C_1} = 3 + 2,5 \cdot \frac{4}{5} = 5$; $y_{C_1} = 4$; $z_{C_1} = -1 + 2,5 \cdot \frac{6}{5} = 0,5$

$$C_1 \equiv (+5, +4, +0,5)$$

Il piano dei T:

$$8(x-5) + 0(y-4) + 6(z-0,5) = 0$$

cioè:

$$z = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6}$$

è un piano paral-

lelo ad y .

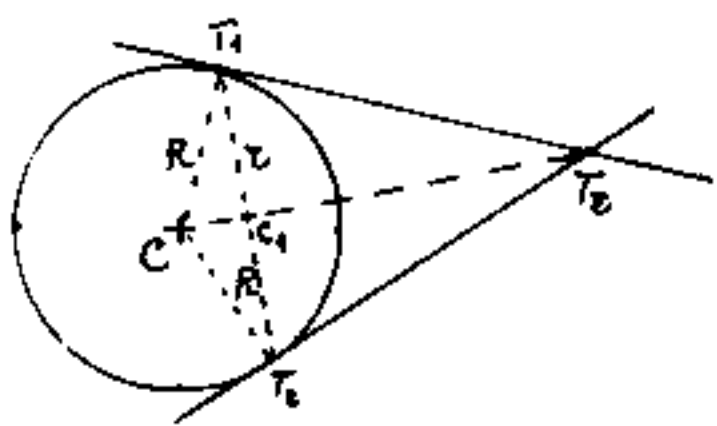
L'angolo 2ω di apertura del cono sarà $2\omega = 2 \arcsin\left(\frac{5}{10}\right) = 60^\circ$

$$\text{L'equazione: } \begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-0,5)^2 = \frac{75}{4} \\ z = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6} \end{cases}$$

È l'equazione della circonferenza dei T ove scelta per es. $y_T = \lambda$ = parametro è possibile per ogni λ calcolare le coordinate di T e quindi il piano tangente in T.

Piani tangenti ad una sfera (passanti per una retta)

- Se la retta data è secante la sfera, il problema è impossibile, perché tutti i piani passanti per quella retta, taglieranno la sfera e non possono essere tangenti.
- Se la retta data è tangente la sfera in un punto P , vi sarà un solo piano passante per la retta e tangente (in P) alla sfera. (Problema già trattato se noto P).
- Se la retta data è esterna alla sfera, si hanno due piani tangenti la sfera. I piani possono essere visualizzati sezionando con un piano perpendicolare alla retta e passante per il centro sfera C , T_1 e T_2 sono



i punti di tangenza, $T_1 T_2$ e $T_2 T_3$
sono le tracce dei due piani,
mentre T_2 è la traccia della
retta sul piano normale.

Insieme dei piani tangenti ad una sfera.

Consideriamo un generico punto: (x, y, z) della superficie sferica di centro $C = (x_c, y_c, z_c)$ avremo:

$$\cos \alpha = \frac{(x - x_c)}{R}; \quad \cos \beta = \frac{(y - y_c)}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{(z - z_c)}{R}$$

ove: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$; sono i coseni direttori della retta contenente R che va da C al punto di tangenza (x, y, z) ed è normale al piano di tangenza (retta di giacitura)

ma:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha (x - x_c) &= (x - x_c)^2 / R \\ \cos \beta (y - y_c) &= (y - y_c)^2 / R \\ \cos \gamma (z - z_c) &= (z - z_c)^2 / R \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{essendo: } (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2 \\ &\text{sommando avremo:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \alpha (x - x_c) + \cos \beta (y - y_c) + \cos \gamma (z - z_c) = R}$$

che è l'equazione generale dei piani tangenti la sfera di centro C e raggio R nei parametri: " $\cos \alpha$ ", " $\cos \beta$ ", " $\cos \gamma$ "; che possono essere ridotti a due utilizzando la relazione: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ e l'equazione diventa:

$$\boxed{\cos \alpha (x - x_c) + \cos \beta (y - y_c) + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} (z - z_c) = R}$$

ove sostituendovi le coordinate di due punti di una retta, si hanno due equazioni che risolvono " $\cos \alpha$ " e " $\cos \beta$ " e quindi il problema dei piani tangenti per una retta.

In linea di principio avremmo potuto scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per la retta (l'equazione presenta una sola incognita per esempio a/d). Una tale impostazione sarebbe comoda se avessimo elementi sui punti di tangenza in tal caso il punto di tangenza risolverebbe l'unica incognita: a/d . Ma anche utilizzando il piano normale alla retta e passante per C (ϵT_c), la risoluzione è più elaborata. facciamo un esempio numerico:

Data la sfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; trovare l'equazione dei piani tangenti per i punti: $P_1 = (1, 1, 2)$; $P_2 = (2, 2, 1)$.

La sequenza delle operazioni da effettuare è la seguente:

- 1) Dall'equazione della sfera ricavare gli elementi:
 $C = (x_c, y_c, z_c)$; R .
nel nostro caso: $x_c = y_c = z_c = 0$; $R = 1$.
- 2) fare subito un disegno prospettico, che eviterà errori grossolani.
- 3) Dall'equazione della retta ricavare le tracce, o almeno le coordinate di due punti P_1 e P_2 e riportare la retta nel disegno prospettico (Nel nostro caso conosciamo già le coordinate di P_1 e P_2)

4) scrivere l'equazione generale dei piani tangenti
la sfera:

(nel nostro caso:)

$$\boxed{\cos \alpha(x) + \cos \beta(y) + \cos(\gamma)z = 1}$$

5) Sostituire nell'equazione generale le coordinate
di due tracce (o due punti) della retta ottenendo
due equazioni:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) + \cos(\beta) + 2\cos(\gamma) = 1 \\ 2\cos\alpha + 2\cos\beta + \cos\gamma = 1 \end{cases}$$

nel nostro caso è possibile trovare subito $\cos(\gamma)$ multi-
plicando per 2 la prima equaz. e sottraendo la seconda

$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{1}{3}}$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cos\alpha^2 = \left(\frac{1}{3} - \cos\beta\right)^2 = \frac{1}{9} + \cos^2\beta - \frac{2}{3}\cos\beta ; \text{ sostituendo}$$

$$2\cos^2\beta - \frac{2}{3}\cos\beta - \frac{7}{9} = 0$$

$$\cos\beta = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{7}{18}} = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{15}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{6}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3} - \cos\beta = \frac{2 - 1 \pm \sqrt{15}}{6} = \frac{1 \mp \sqrt{15}}{6}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1 \mp \sqrt{15}}{6}}$$

L'equazione dei due piani tangenti è:

$$\begin{cases} \frac{(1+\sqrt{15})}{6}x + \frac{(1-\sqrt{15})}{6}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0 \\ \frac{(1-\sqrt{15})}{6}x + \frac{(1+\sqrt{15})}{6}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0 \end{cases}$$

od anche:

$$\begin{cases} (1+\sqrt{15})x + (1-\sqrt{15})y + 2z - 6 = 0 \\ (1-\sqrt{15})x + (1+\sqrt{15})y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

6) Le coordinate dei punti di tangenza: (avendo $x_c = y_c = z_c = 0$)

$$T_1 \equiv \left(\frac{1+\sqrt{15}}{6}, \frac{1-\sqrt{15}}{6}, \frac{1}{3} \right) = (0,81216, -0,47883, 0,33\bar{3})$$

$$T_2 \equiv \left(\frac{1-\sqrt{15}}{6}, \frac{1+\sqrt{15}}{6}, \frac{1}{3} \right) = (0,47883, 0,81216, 0,33\bar{3})$$

L'equazione della retta per P_1, P_2 :

$$\frac{x-1}{(2-1)} = \frac{y-1}{(2-1)} = \frac{z-2}{1-2}$$

$$(x-1) = (y-1) = -(z-2)$$

$\begin{cases} x=y \\ x=-z+3 \\ y=-z+3 \end{cases}$ traccia su $xy \rightarrow T_{xy} = B \equiv (3, 3, 0)$
 le altre due tracce $T_{xz} = T_{yz} = A \equiv (0, 0, 3)$ coincidono su z .

Il piano per C perpendicolare alla retta per P_1, P_2

$$(x-x_c) + (y-y_c) - (z-z_c) = 0$$

$$x + y - z = 0$$

Le coordinate di T_v : $-z+3 + -z+3 - z = 0 \Rightarrow 3z=6 \Rightarrow z_v=2$

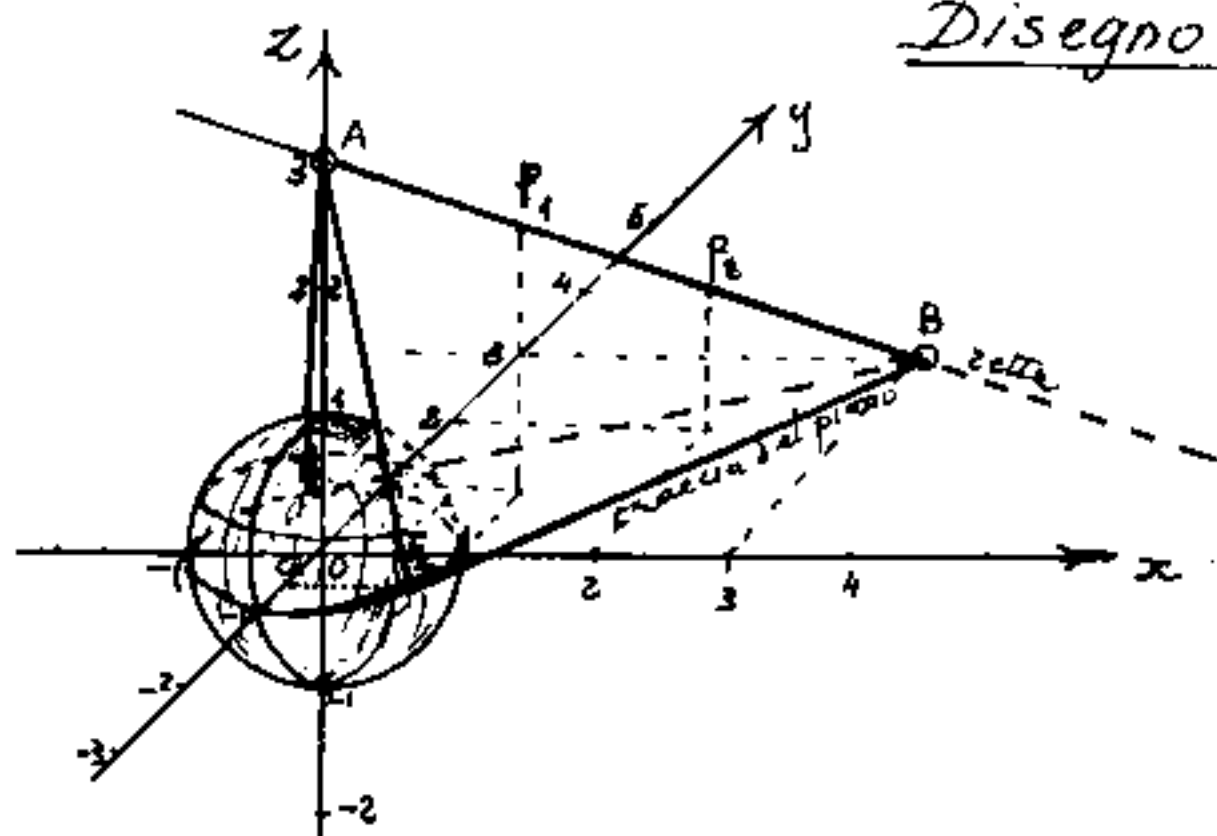
$$y_v = x_v = -z+3 = 1$$

$$T_v \equiv (1, 1, 2) = P_1 \text{ (coincide con } P_1)$$

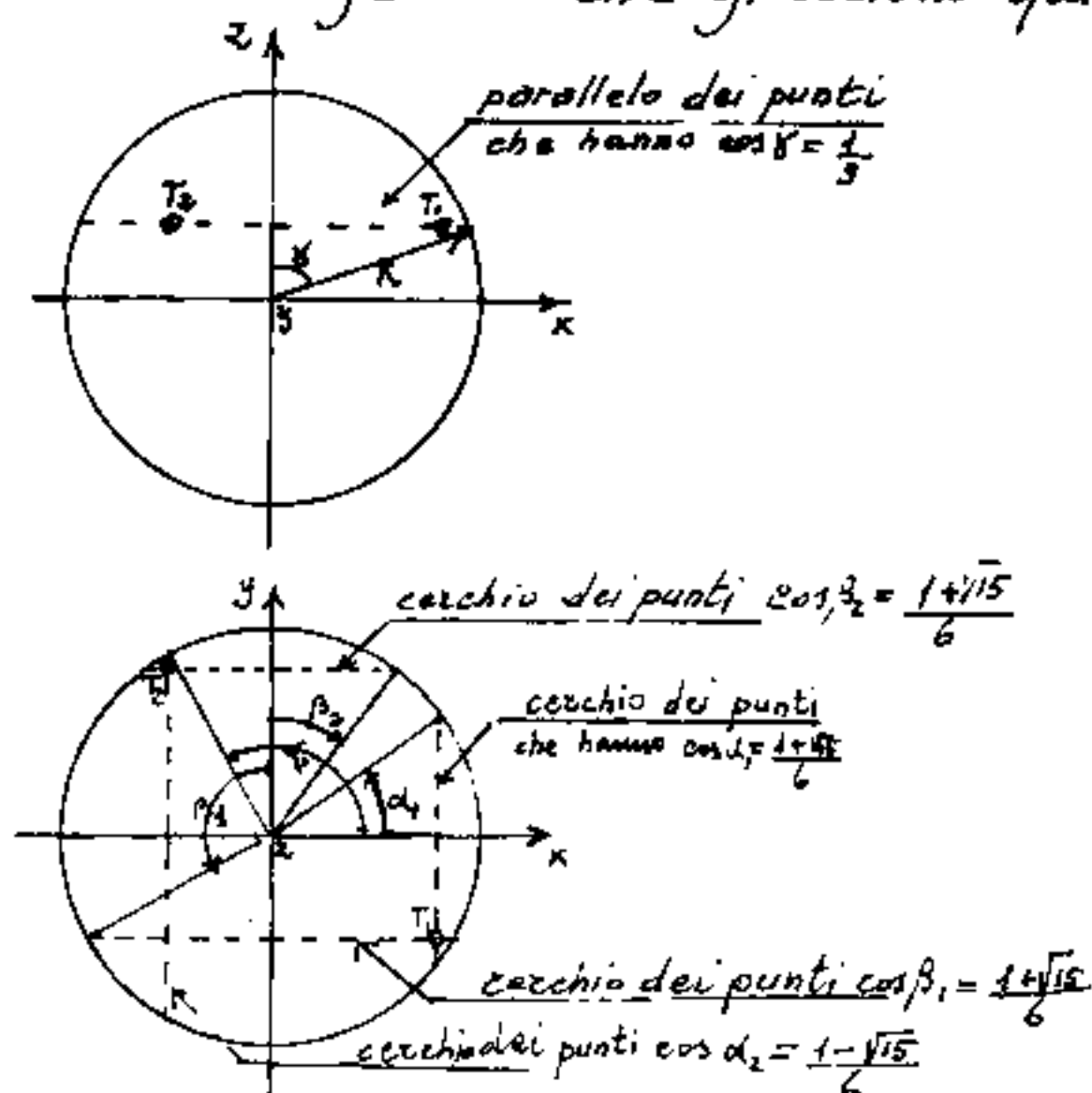
Le tracce su xy dei piani di tangenza passano per B

per $x = + \frac{6}{1+\sqrt{15}} = 1,23128$ e per $y = 1,23128$.

Disegno prospettico



Nel disegno prospettico si vedono i due piani tagliati dalle rette passanti per i punti di tangenza T_1, T_2 , e per A , in modo da "vedere" la sfera e notare che le dimensioni tornano coi calcoli. Si noti che $\cos \delta = \frac{1}{3} \Rightarrow \delta = 70^\circ 31' 44''$ comune ai due punti di tangenza che giacciono quindi sullo stesso parallelo



Altro esempio numerico:

Trovare le equazioni dei piani tangenti la sfera:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$; e passanti per la retta:

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$$

Ricaviamo gli elementi della sfera:

$$C \equiv (1, -3, -1) ; R = \sqrt{1+9+1-8} \rightarrow R = \sqrt{3} ;$$

l'equazione della sfera può scriversi:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 3$$

I piani della retta:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 12 = 4y - 4 \\ (x - 4) = 4z - 4 \\ y - 1 = 3z - 3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x - 2 \quad (\text{parallelo a } z) \\ z = \frac{1}{4}x \quad (\text{passante per } y) \\ z = \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \quad (\text{parallelo ad } x) \end{array}$$

Quindi la retta incontra l'asse y nel punto $A \equiv (0, 2, 0)$

e la sua traccia sul piano xz sarà $B \equiv \left(\frac{8}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

I coseni direttori della retta, avendo: $\sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{26}} ; \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{26}} ; \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{26}} ;$$

I piani perpendicolari alla retta distanti δ dall'origine degli assi avranno per equazione: (δ = parametro)

$$4x + 3y + z - \delta\sqrt{26} = 0$$

e fra essi, quello che passa per il centro della sfera, conterrà i punti di tangenza. Perciò sostituendovi le coordinate di C possiamo ricavare δ e quindi

L'equazione del piano:

$$4(1) + (3)(-3) + (1)(-1) = \delta \sqrt{26} \rightarrow \delta = \frac{-6}{\sqrt{26}}$$

sostituendo δ :

$$\boxed{4x + 3y + z + 6 = 0}$$

equazione del piano normale alla retta, passante per C e contenente i punti di tangenza con la sfera.

Facciamo sistema con le equazioni della retta per calcolare T_c . (È più comodo sostituire le equazioni

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{della retta: } (x=4z); (y=3z-2) \text{ nell'equa-} \\ \text{zione del piano normale per C, avrem-} \\ \text{mo: } (16z + 9z - 6 + z + 6 = 0) \rightarrow z=0; x=0; y=-2; \end{array}$$

comunque la risoluzione coi determinanti è una verifica)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 26 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -17 \end{vmatrix} = -52 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$(x=0) \quad y = \frac{-52}{26} = -2 \quad (y=-2) \quad (z=0)$

Cioè: $T_c \equiv (0, -2, 0)$ notiamo che coincide con A

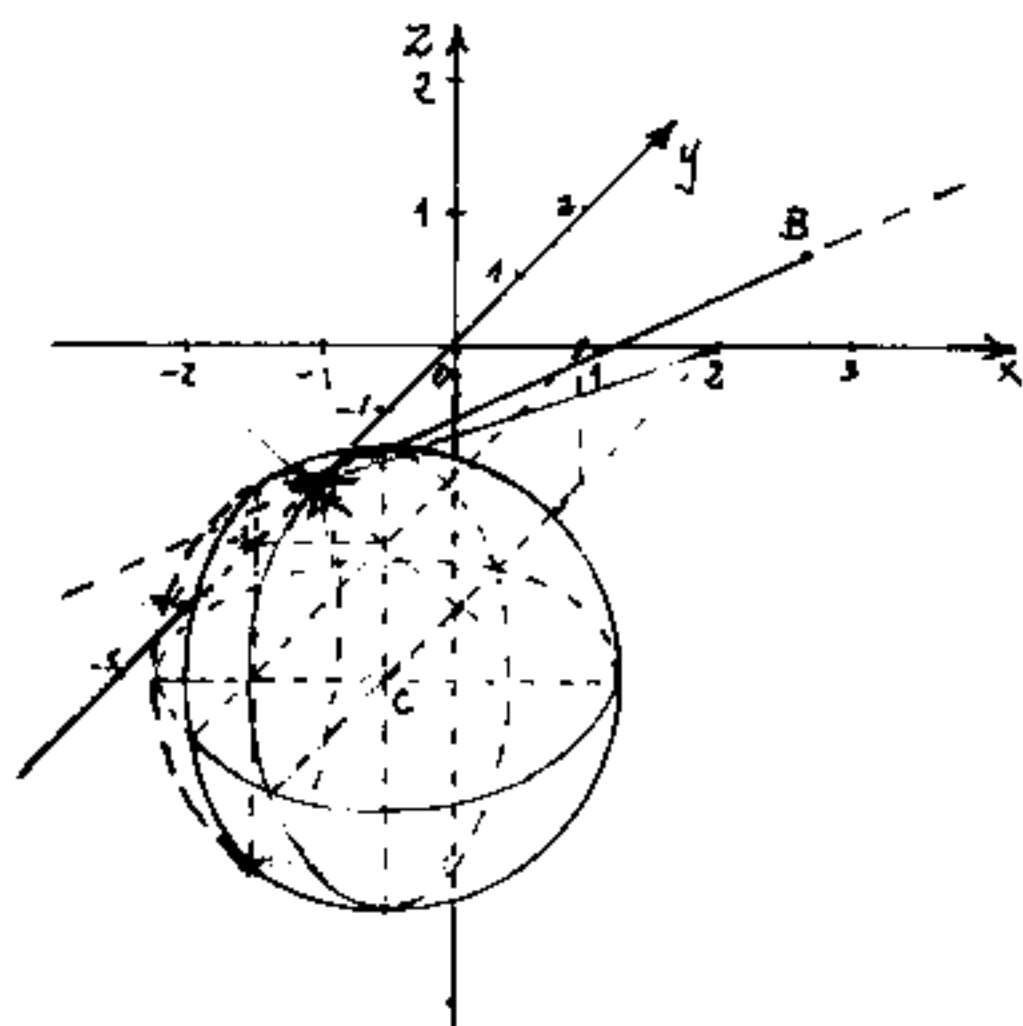
Calcoliamo la distanza $\overline{CT_c} = \overline{CA} = \sqrt{(1-0)^2 + (-3+2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{3}$.

Ma anche $R = \sqrt{3}$; ed essendo $\overline{CT_c}$ la distanza minima del centro C dalla retta; vuol dire che la retta è tangente la sfera; esiste quindi un unico piano per tale retta che sia tangente alla sfera e lo sarà in $T_c \equiv A$.

I coseni direttori della retta $\vec{T_c C} = \vec{AC} \equiv [\cos \alpha = \frac{1-0}{\sqrt{3}}; \cos \beta = \frac{-3+2}{\sqrt{3}}; \cos \gamma = \frac{-1-0}{\sqrt{3}}]$

$$\frac{x-0}{\sqrt{3}} + \frac{y+2}{\sqrt{3}} - \frac{z-0}{\sqrt{3}} = 0 \rightarrow \boxed{x - y - z - 2 = 0} : (\text{piano tangente}).$$

disegno prospettico



Altra risoluzione.

Cerchiamo ora una risoluzione più generale, senza avvalersi delle condizioni particolari del problema: (retta tangente alla sfera e quindi di un solo piano tangente)

L'equazione generale di tutti i piani tangenti a questa sfera è: $(x-1)\cos\alpha + (y+3)\cos\beta + (z+1)\cos\gamma = \sqrt{3}$ sostituendovi i due punti della retta $A \equiv (0, -2, 0)$ $B \equiv (\frac{8}{3}, 0, \frac{2}{3})$ ed aggiungendo la relazione: $\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$ otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} A) & \begin{cases} -\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \sqrt{3} \\ (\frac{8}{3}-1)\cos\alpha + 3\cos\beta + (1+\frac{2}{3})\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \frac{5}{3}\sqrt{3} \end{cases} \\ B) & \end{aligned}$$

nelle due incognite $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ e possiamo scrivere:

$$\begin{cases} -\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \sqrt{3} \\ 5\cos\alpha + 9\cos\beta + 5\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{ed anche: } 5\cos\alpha + 9\cos\beta + 5(\sqrt{3} + \cos\alpha - \cos\beta) = \sqrt{3}$$

$$10\cos\alpha + 4\cos\beta = -2\sqrt{3}$$

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\cos\alpha.$$

sostituendo:

$$-\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\cos\alpha + \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\cos\alpha\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$-\frac{7}{2}\cos\alpha + \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \left(\frac{3}{4} + \frac{25}{4}\cos^2\alpha + \frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\alpha\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{29}{4}\cos^2\alpha - \frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\alpha} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{7}{2}\cos\alpha\right)$$

elevando a quadrato:

$$\frac{1}{4} - \frac{29}{4}\cos^2\alpha - \frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\alpha = \frac{27}{4} + \frac{49}{4}\cos^2\alpha + \frac{21}{2}\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$\frac{78}{4}\cos^2\alpha + \frac{26\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{26}{4} = 0$$

semplificando:

$$\boxed{\cos^2\alpha + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos\alpha + \frac{1}{3} = 0}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (\text{un solo valore})$$

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{2\sqrt{3}} = \boxed{\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad \boxed{\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \text{sostituendo:}$$

$$\frac{(x-1)}{-\sqrt{3}} + \frac{(y+3)}{\sqrt{3}} + \frac{(z+1)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$-x + y + z = 3 - 3 - 2$$

e l'equazione del piano tangente:

$$\boxed{-x + y + z + 2 = 0}$$

Moltiplicando per (-1) otterremmo il precedente risultato (con questi segni è positiva la faccia opposta cioè giacitura $\vec{CA}$.)

Il verso delle giaciture di piani

Consideriamo una retta passante per due punti:

$$A \equiv (x_A, y_A, z_A) ; B \equiv (x_B, y_B, z_B) ;$$

icoseni direttori saranno:

per retta orientata: $\overrightarrow{AB}$; $\cos(\alpha) = \frac{x_B - x_A}{AB}$; $\cos \beta = \frac{(y_B - y_A)}{AB}$; $\cos \gamma = \frac{(z_B - z_A)}{AB}$

per retta orientata $\overrightarrow{BA}$; $\cos \alpha = \frac{(x_A - x_B)}{AB}$; $\cos \beta = \frac{(y_A - y_B)}{AB}$; $\cos \gamma = \frac{(z_A - z_B)}{AB}$

Poiché ogni retta è di giacitura ai piani ad essa perpendicolari considereremo positiva la faccia del piano che guarda il verso positivo delle sue rette di giacitura, e negativa la faccia opposta.

Cio' comporta che cambiando i segni all'equazione di un piano, esso non cambia, ma muta il suo orientamento.

Poiché nell'equazione di un piano figura un " δ ", che è la sua distanza dall'origine degli assi, che cambia segno se moltiplichiamo per (-1) ; avremo che se: $\delta = \overrightarrow{ON} < 0$; $\delta = \overrightarrow{NO} > 0$; conforme al verso delle rette di giacitura.

Caso generale

L'esempio ora trattato è un caso particolare in quanto la retta è tangente alla sfera e quindi si ha un solo piano tangente. Anche l'esempio precedente è un caso particolare perché la sfera è di centro assi.

Per trattare il caso generale spostiamo la sfera del secondo esempio in modo che non sia più tangente alla retta.

Esempio numerico:

Sia: $(x-1)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 3$ l'equazione della

sfera nella nuova posizione: $C \equiv (-1, -5, -1)$; $R = \sqrt{3}$

La retta passa per $A \equiv (0, -2, 0)$; $B(\frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3})$; $D \equiv (4, 1, 1)$
è immutata: A è la traccia sull'asse y ; B è la traccia sul piano zx ,
 D è il punto dell'equazione canonica della retta.

L'equazione di tutti i piani tangenti alla sfera:

$$\cos\alpha(x-x_0) + \cos\beta(y-y_0) + \cos\gamma(z-z_0) = R$$

sostituendo le coordinate di C , ed R :

$$\cos\alpha(x-1) + \cos\beta(y+5) + \cos\gamma(z+1) = \sqrt{3}$$

dove passare per A : $(-1)\cos\alpha + (3)\cos\beta + (1)\cos\gamma = \sqrt{3}$

dove passare per B : $\frac{5}{3}\cos\alpha + 5\cos\beta + 5\cos\gamma = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} -\cos\alpha + 3\cos\beta + \cos\gamma = \sqrt{3} \\ \cos\alpha + 3\cos\beta + \cos\gamma = \frac{3}{5}\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow 2\cos\alpha = -\frac{2}{5}\sqrt{3} \quad \boxed{\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}}$$

$$\begin{array}{l} \hline +6\cos\beta + 2\cos\gamma = \frac{8}{5}\sqrt{3} \end{array} \rightarrow \boxed{\cos\gamma = \frac{4}{5}\sqrt{3} - 3\cos\beta}$$

consideriamo ora:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{3}{25} + \cos^2 \beta + \frac{18}{25} + 9 \cos^2 \beta - \frac{24\sqrt{3}}{5} \cos \beta = 1$$

$$(10) \cos^2 \beta - \frac{24\sqrt{3}}{5} \cos \beta + \frac{26}{25} = 0$$

$$\boxed{\cos^2 \beta - 2\left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right) \cos \beta + \frac{13}{125} = 0}$$

$$\cos \beta = \frac{6\sqrt{3}}{25} \pm \sqrt{\frac{108}{625} - \frac{65}{625}} = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{43}}{25} \quad \begin{cases} = \frac{16,95}{25} = 0,67799 \\ = \frac{3,83}{25} = 0,15399 \end{cases}$$

$$\cos \gamma = \frac{20}{25} \sqrt{3} - \frac{18\sqrt{3} \pm 3\sqrt{43}}{25} = \frac{2\sqrt{3} \mp 3\sqrt{43}}{25} = \begin{cases} \frac{-16,31}{25} = -0,64833 \\ \frac{23,14}{25} = +0,925457 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{5} = -0,346410$$

scriviamo l'equazione dei piani tangenti:

$$-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-1) + \frac{6\sqrt{3} + \sqrt{43}}{25}(y+5) + \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{43}}{25}(z+1) = \sqrt{3}$$

$$-5(x-1) + (6 + \sqrt{43}/3)(y+5) + (2 - \sqrt{129})/3(z+1) = 25$$

$$\boxed{-5x + \left(6 + \frac{\sqrt{43}}{3}\right)y + \left(2 - \frac{\sqrt{129}}{3}\right)z + \left(12 + \frac{2}{3}\sqrt{129}\right) = 0}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-1) + \left(\frac{6\sqrt{3} - \sqrt{43}}{25}\right)(y+5) + \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{43}}{25} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{-5x + \left(6 - \frac{\sqrt{43}}{3}\right)y + \left(2 + \frac{\sqrt{129}}{3}\right)z + \left(12 - \frac{2}{3}\sqrt{129}\right) = 0}$$

verifichiamo che questi piani passano per $A \equiv (0, -2, 0)$; $\left\{\frac{\sqrt{43}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{129}\right\}$

verifichiamo che passano per $D \equiv (4, 1, 1)$

$$-20 + 6 + \frac{1}{3}\sqrt{129} + 2 - \frac{2}{3}\sqrt{129} + 12 + \frac{2}{3}\sqrt{129} = 0; \quad -20 + 6 - \frac{1}{3}\sqrt{129} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{129} + 12 - \frac{2}{3}\sqrt{129} = 0;$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di tangenza.

$$R \cos \alpha = (x_T - x_c) ; R \cos \beta = (y_T - y_c) ; R \cos \gamma = (z_T - z_c)$$

$$x_{T_1} = x_{T_2} = \left(-\frac{1}{5}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} + 1 = \frac{2}{5}$$

$$x_{T_1} = x_{T_2} = +0,4$$

$$\left. \begin{matrix} y_{T_1} \\ y_{T_2} \end{matrix} \right\} = \left(\frac{6}{25}\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{43}}{25} \right) \sqrt{3} - 5 = \begin{cases} \frac{10\sqrt{3} + \sqrt{129}}{25} \\ \frac{10\sqrt{3} - \sqrt{129}}{25} \end{cases}$$

$$y_{T_1} = -3,82568733$$

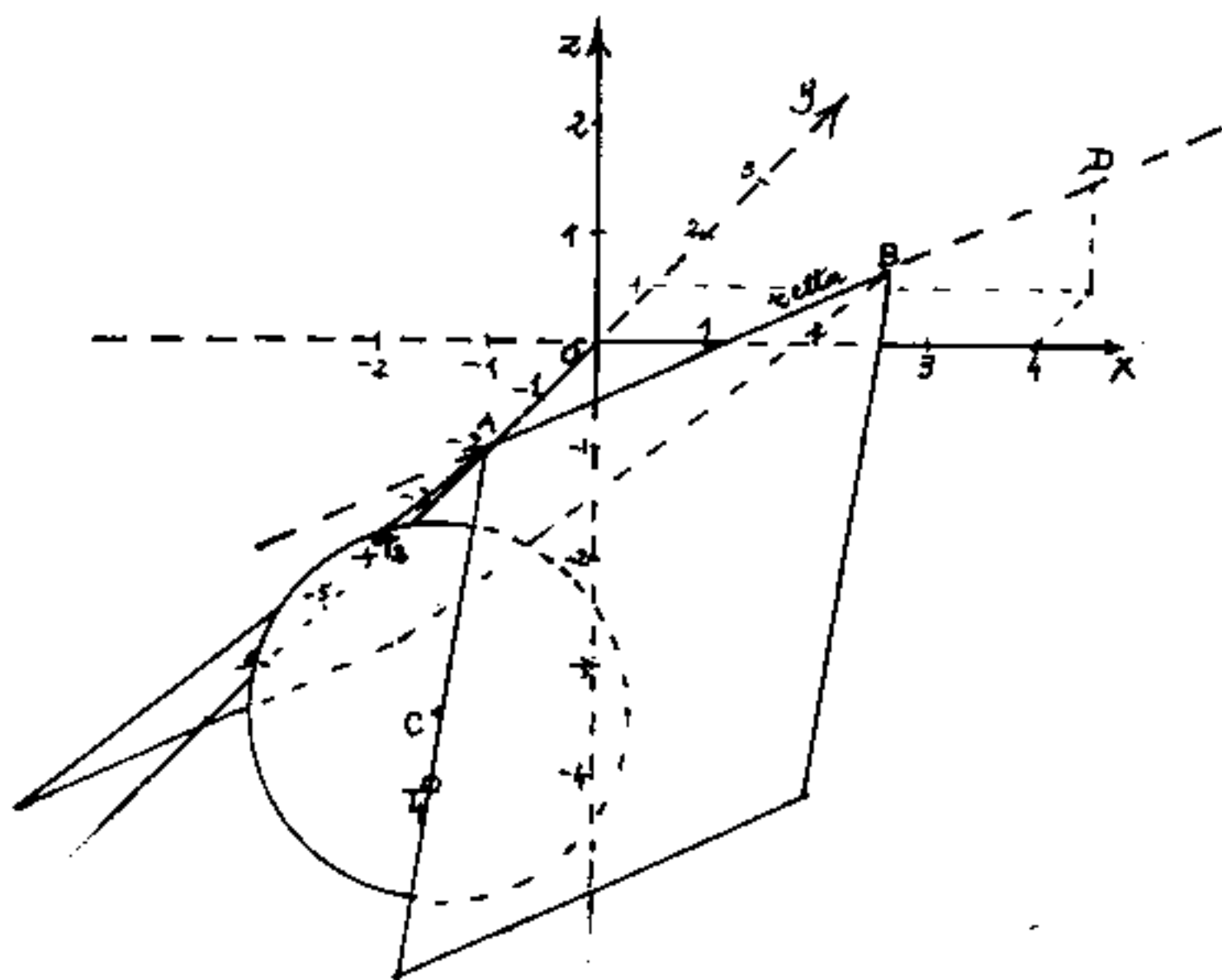
$$y_{T_2} = -4,43431267$$

$$\left. \begin{matrix} z_{T_1} \\ z_{T_2} \end{matrix} \right\} = \left(\frac{2}{25}\sqrt{3} \pm \frac{3\sqrt{43}}{25} \right) \sqrt{3} - 1 = \begin{cases} \frac{-19 - 3\sqrt{129}}{25} \\ \frac{-19 + 3\sqrt{129}}{25} \end{cases}$$

$$z_{T_1} = -2,1229380$$

$$z_{T_2} = +0,6029380$$

Disegno prospettico



N.B: abbiamo tagliato i piani tangenti secondo le rette:

AT_1 ed AT_2 e per B le parallele, e le parallele alla retta comune.

Intersezione di una retta con una sfera.

Sia: $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$ l'equazione della sfera, e sia: $\frac{x-x_A}{l} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n}$; l'equazione della retta. Ricavando da quest'ultima una incognita; per es. $z = \frac{n}{m}(y-y_A) + z_A$; $z = \frac{n}{l}(x-x_A) + z_A$; che possiamo sostituire nell'equazione della sfera:

$$\begin{cases} (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + \left(\frac{n}{l}(x-x_A) + z_A - z_c\right)^2 = R^2 \\ (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + \left(\frac{n}{m}(y-y_A) + z_A - z_c\right)^2 = R^2 \end{cases}$$

si ha così un sistema di due equazioni in due incognite x, y ; dal quale possono aversi due radici reali, se la retta interseca la sfera; una sola radice reale, se è tangente; nessuna radice reale, se è esterno alla sfera.

Spesso, ad evitare di cadere in equazioni di 4°, conviene sostituire o risolvere binomi del tipo: $(x-x_c)$; $(y-y_c)$; $(z-z_c)$.

Esempio numerico

L'equazione della sfera sia:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$

e l'equazione della retta sia:

$$\frac{(x-4)}{3} = \frac{(y+1)}{2} = \frac{(z-1)}{1}$$

avremo:

Sostituiamo nella prima equazione:

$$(z-1) = \frac{(x-4)}{3} \quad ; \quad (y+1) = \frac{2}{3}(x-4) \quad ; \quad \text{ed avremo:}$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{2}{3}(x-4)\right)^2 + \left(\frac{x-4}{3}\right)^2 = 4$$

$$9(x^2 - 2x + 1) + 4(x^2 - 8x + 16) + (x^2 - 8x + 16) = 36$$

$$14x^2 - 58x + 53 = 0$$

$$x = \frac{58 \pm \sqrt{3364 - 2968}}{2 \cdot 14} = \frac{58 \pm \sqrt{396}}{2 \cdot 14} = \boxed{\frac{29 \pm 3\sqrt{11}}{14} = x}$$

$$y = \frac{2}{3}(x-4) - 1 = \frac{2x-11}{3} = \frac{29 \pm 3\sqrt{11}}{7 \cdot 3} - \frac{11}{3} = \boxed{y = \frac{-16 \pm \sqrt{11}}{7}}$$

$$z = \frac{x-4}{3} + 1 = \frac{x-1}{3} = \frac{29 \pm 3\sqrt{11} - 14}{14 \cdot 3} = \boxed{z = \frac{+5 \pm \sqrt{11}}{14}}$$

$$x = \begin{cases} x_1 = 2,78213 \\ x_2 = 1,36072 \end{cases} ; y = \begin{cases} y_1 = -1,8119107 \\ y_2 = -2,7595178 \end{cases} ; z = \begin{cases} z_1 = 0,5940446 \\ z_2 = 0,1202411 \end{cases}$$

verifiche:

$$\left(\frac{15 + 3\sqrt{11}}{14}\right)^2 + \left(\frac{-18 + 2\sqrt{11}}{14}\right)^2 + \left(\frac{-9 + \sqrt{11}}{14}\right)^2 = 4$$

$$225 + 90\sqrt{11} + 99 + 324 - 72\sqrt{11} + 44 + 81 - 18\sqrt{11} + 11 = 4 \cdot 196 = 784 \quad \checkmark \text{ bene.}$$

$$225 - 90\sqrt{11} + 99 + 324 + 72\sqrt{11} + 44 + 81 + 18\sqrt{11} + 11 = 784 \quad \checkmark \text{ bene.}$$

$T_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $T_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ appartengono alla superficie sferica.

$$\left(\frac{\frac{29 \pm 3\sqrt{11}}{14} - 4}{3}\right) = \left(\frac{\frac{-16 \pm \sqrt{11}}{7} + 1}{-2}\right) = \left(\frac{\frac{5 \pm \sqrt{11}}{14} - 1}{1}\right) = \boxed{\frac{-9 \pm \sqrt{11}}{14}}$$

I punti T_1 e T_2 appartengono alla retta.

Intersezione di un piano con una sfera.

La sfera sia: $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$; ed il piano sia: $ax + by + cz + d = 0$; Sappiamo che la distanza di "C" dal piano è data da:

$$\overline{CT} = \frac{ax_c + by_c + cz_c + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \gtrless R$$

a seconda che:

$\overline{CT} > R$ il piano è esterno alla sfera

$\overline{CT} = R$ " " è tangente in T alla sfera

$\overline{CT} < R$ " " taglia la sfera.

Poiché $\overline{CT}$ è sulla retta normale al piano, "T" sarà anche il centro "C" della circonferenza in intersezione fra piano e sfera, il cui raggio "r" è dato da:

$$r = \sqrt{R^2 - \overline{CT}^2}$$

Le due equazioni rappresentano una (linea) circonferenza nello spazio.

esempio numerico:

Sfera: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$; piano: $x - 3z - 1 = 0$

$$(a=1; b=0; c=-3; d=-1); \overline{CT} = \frac{(1)(1) + 0(-1) + (-3)(1) - 1}{\sqrt{1 + 0 + 9}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = |0,95|$$

$$r = \sqrt{4 - \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{31}{10}} = 1,76$$

possiamo calcolare le coordinate di "T", vedi "distanza di un punto da un piano" otteniamo:

$$x_T = \frac{-da + (b^2 + c^2)x_c - bcy_c - ca z_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{-(-1)(1) + (0+9)(1) - 0 - (-3)(1)(1)}{10}$$

$$x_T = \frac{13}{10} = 1,3$$

$$y_T = \frac{-db + (a^2 + c^2)y_c - acx_c - bc z_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{-(-1)(0) + (1+9)(-1) - 0 - 0}{10}$$

$$y_T = \frac{-10}{10} = -1$$

$$z_T = \frac{-cd + (a^2 + b^2)z_c - acx_c - bcy_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{-(-3)(-1) + (1+0)(1) - (1)(-3)(1) - 0}{10}$$

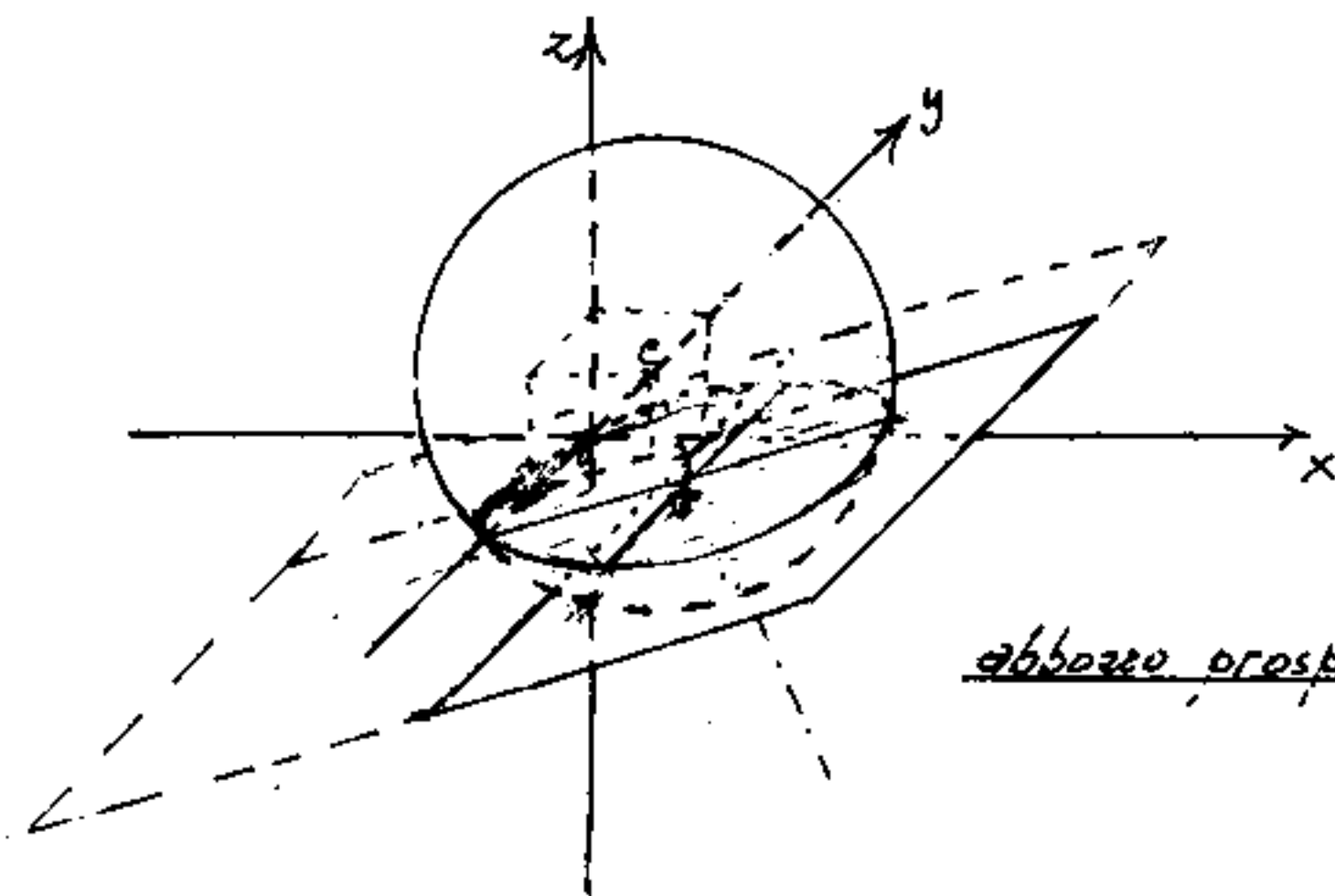
$$z_T = \frac{1}{10} = 0,1$$

Verifichiamo che: $T \equiv (1,3, -1, 0,1)$ appartiene al piano

$$\frac{13}{10} - \frac{3}{10} - \frac{10}{10} = 0$$

$$\left(\frac{10}{10} - \frac{13}{10}\right)^2 + \left(-\frac{10}{10} + \frac{10}{10}\right)^2 + \left(\frac{10}{10} - \frac{1}{10}\right)^2 = \overline{CT}^2$$

$$\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{90}{100}} \quad CT = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad (\text{torna})$$



abbozzo prospettico

Intersezione fra due sfere

Consideriamo due sfere, rispettivamente di centri: C_1 e C_2 e di raggi R_1 ed R_2 , la distanza $\overline{C_1C_2}$

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \geq (R_1 + R_2) \text{ e sia}$$

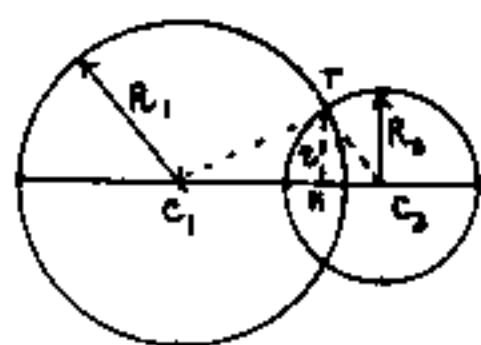
Se: $\overline{C_1C_2} > (R_1 + R_2)$ le sfere sono esterne, e non si intersecano fra loro.

Se: $\overline{C_1C_2} = (R_1 + R_2)$ le sfere sono tangenti esterne.

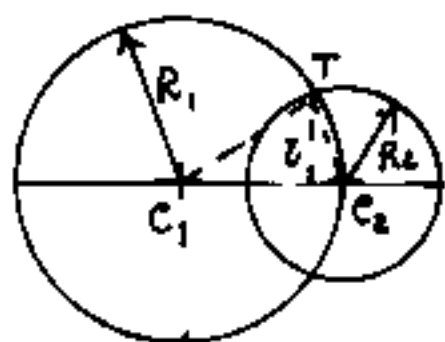
Se: $\overline{C_1C_2} = |R_1 - R_2|$ le sfere sono tangenti interne

Se: $\overline{C_1C_2} < (R_1 + R_2)$ ma $\overline{C_1C_2} > R_1 > R_2$ le sfere si intersecano

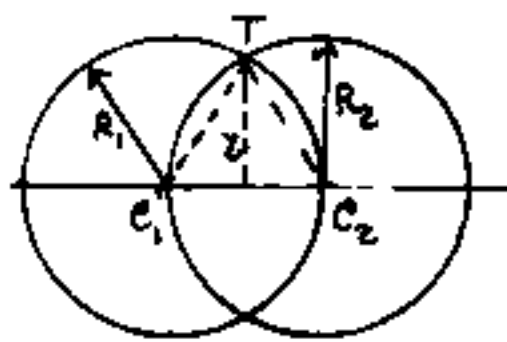
ed il piano della circonferenza comune è intermedio ai centri, il raggio della circonferenza comune è l'altezza relativa a $\overline{C_1C_2}$ del triangolo che ha per lati $R_1, R_2, \overline{C_1C_2}$.



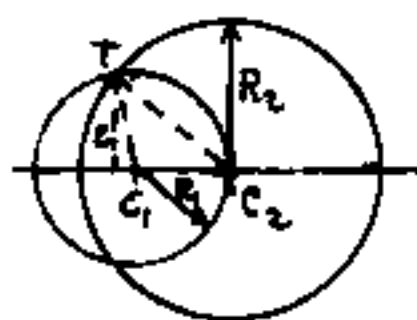
Se: $\overline{C_1C_2} = R_1 > R_2$; $\overline{C_1C_2} = R_1 = R_2$; $\overline{C_1C_2} = R_1 < R_2$



$$z = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{R_1^2 - \frac{R_2^2}{4}}$$

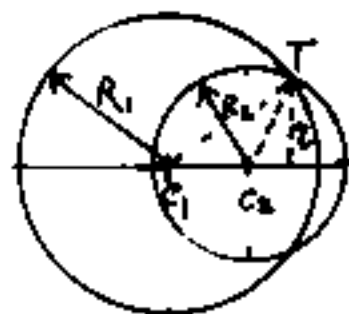


$$z = \frac{R_1 \sqrt{3}}{2} = \frac{R_2 \sqrt{3}}{2}$$



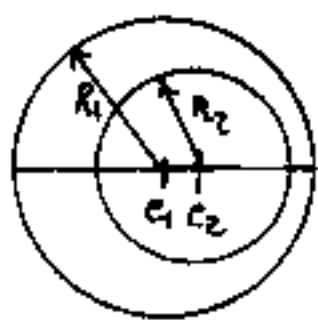
$$z = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{R_1^2 - \frac{R_2^2}{4}}$$

Se: $\overline{C_1C_2} < R_1 > R_2$ ed $\overline{C_1C_2} > (R_1 - R_2)$ le due sfere si intersecano, C_2 è interno alla sfera R_1 , il piano è esterno al segmento $\overline{C_1C_2}$ ed il raggio z è l'altezza del triangolo C_1C_2 rispetto a $\overline{C_1C_2}$.



cano, C_2 è interno alla sfera R_1 , il piano è esterno al segmento $\overline{C_1C_2}$ ed il raggio z è l'altezza del triangolo C_1C_2 rispetto a $\overline{C_1C_2}$.

se $\overline{C_1 C_2} < (R_1 - R_2)$ con $R_1 > R_2$ la seconda sfera è interna alla prima e non si verificano intersezioni. Al caso limite di $\overline{C_1 C_2} = 0$, le sfere sono concentriche



Esempio numerico

Si abbiano le sfere: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$
 ed $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 3$: studiare l'intersezione.

$$C_1 \equiv (1, -1, +1) ; R_1 = 2 ; C_2 \equiv (1, -3, -1) ; R_2 = \sqrt{3}$$

abbiamo indicato $R_1 > R_2$. $\overline{C_1 C_2} = \sqrt{0+4+4} = \boxed{2\sqrt{2} = \overline{C_1 C_2}}$

$$2\sqrt{2} = 2.82843 < R_1 + R_2 = 2 + 1.7321 = \underline{3.7321} \quad \text{ed } \overline{C_1 C_2} > R_1$$

perciò si ha una intersezione reale.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad (\text{prima sfera})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0 \quad (\text{seconda sfera})$$

$$4y + 4z + 9 = 0 \quad \text{equaz. del piano comune}$$

alla intersezione che risulta parallelo all'asse X ed inclinato a 45° sugli assi Y e Z che incontra a $-\frac{9}{4} = -2.25$.

$$\cos(\widehat{C_1 C_2}) = \frac{R_1^2 + \overline{C_1 C_2}^2 - R_2^2}{2 R_1 \overline{C_1 C_2}} = \frac{4 + 8 - 3}{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{9}{8\sqrt{2}} = 0.79550 ;$$

$$\overline{C_1 H} = R_1 \cos(\widehat{C_1 C_2}) = 1.590990 ; \quad r = \sqrt{R_1^2 - \overline{C_1 H}^2} = \boxed{1.21191996} = r$$

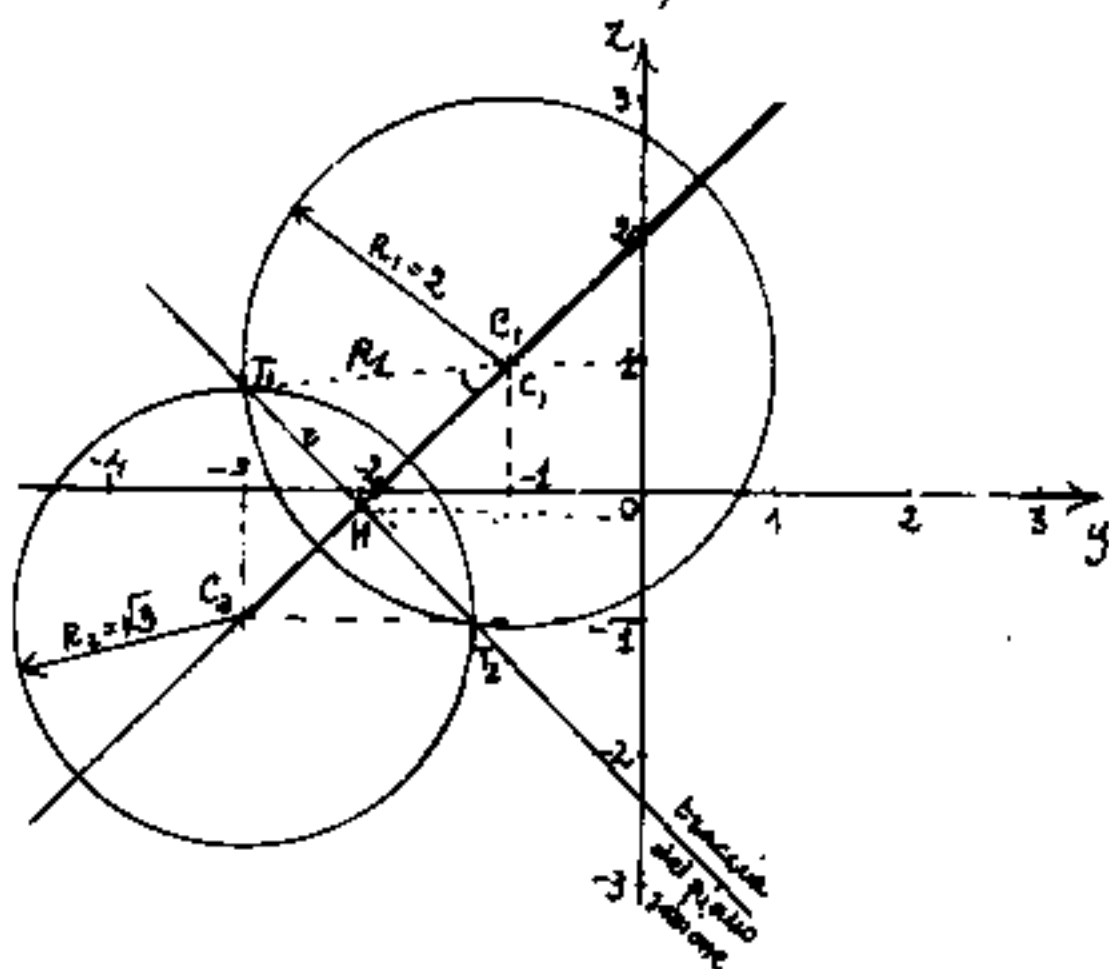
$$\text{L'equazione della retta } \overline{C_1 C_2} \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{(-3+1)} = \frac{(z-1)}{-1-1}$$

$$\cos d = \frac{\pi}{2} \quad (\text{perpendicolare alla } X) ; \quad \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{2}} ; \quad X_H = X_{C_1} = X_{C_2} = +1 ; \quad Y_H = Y_{C_1} + \overline{C_1 H} \cos \gamma$$

$$Y_H = -1 - \frac{1.590990}{\sqrt{2}} = -1 - 1.125 = -2.125000 ; \quad Z_H = Z_{C_1} - \overline{C_1 H} \cos \gamma = +1 - 1.125$$

Proiettiamo sul piano YZ la figura in scala $1:1\text{cm}$
in modo da verificare
i nostri calcoli:



$$\overline{C_1 C_2} = 3\sqrt{2} = 2,82843$$

$$\widehat{TC_1 C_2} = 37^\circ 17' 52''$$

$$\gamma = 1,21191996$$

$$\overline{CH} = 1,590990$$

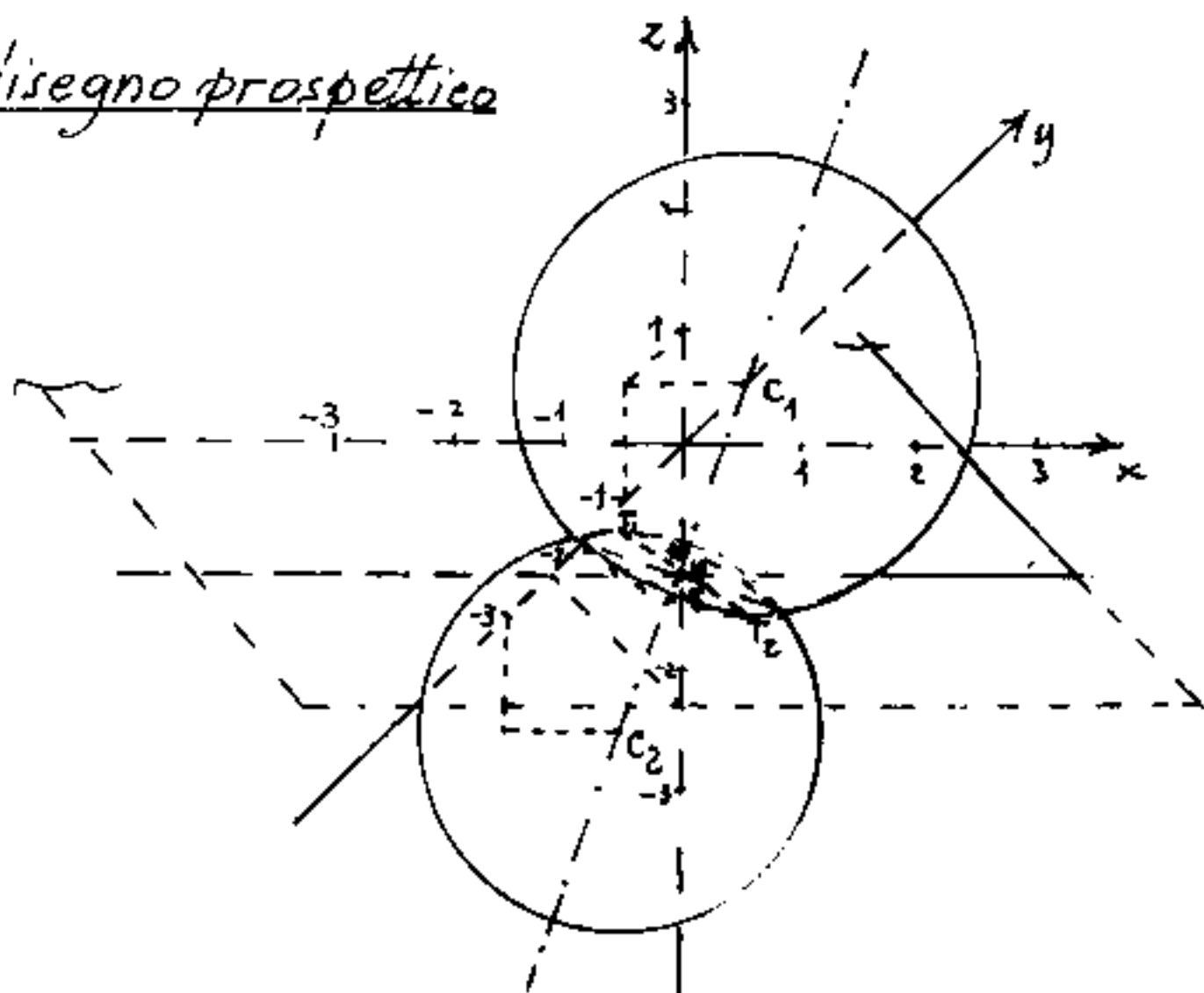
$$H \equiv (1, -2,125, -0,125)$$

che nei limiti dell'errore

di graficismo, possono ritenersi esatti.

verifichiamo che H centro della circonferenza appartiene
al piano: $4y + 4z + 9 = 0$; infatti: $4(-2,125) + 4(-0,125) + 9 = 0$.

Per il confronto con la proiezione in scala: $1:1\text{cm}$.
facciamo anche un
disegno prospettico



Il cilindro

Dicesi superficie cilindrica ogni superficie che sia generata da una retta (detta generatrice) che trasla mantenendosi parallela ad un'altra retta. (detta direttrice).

Dicesi "sezione retta" di una superficie cilindrica l'intersezione delle rette generatrici con un piano ad esse normale. Cioè, si ha "sezione retta" quando le rette generatrici sono di giacitura del piano di sezione.

Dicesi sezione obliqua l'intersezione con un piano inclinato rispetto al precedente, cioè con piani che hanno rette di giacitura oblique rispetto alla direttrice e alle generatrici sue parallele.

Tutte le sezioni rette sono uguali fra loro.

Tutte le sezioni oblique, con piani di ugual giacitura sono uguali fra loro.

La linea intersezione della sezione retta denomina il cilindro; avremo così cilindri circolari, parabolici, catenari, cicloidi, ecc.

La sezione cilindrica, può essere: "chiusa", come nel caso del cerchio, dell'ellisse, della cardioide, ecc.; può essere "aperta", come nel caso della parabola, della catenaria, ecc.

Abbiamo già visto che se una espressione: $f(x, y, z) = 0$ risulta mancante di una coordinata: ($f(x, y) = f(x, z) = 0$; $f(y, z) = 0$) si ha una superficie cilindrica con direttrice parallela all'asse mancante, e la sezione retta sarà la funzione dei due assi restanti. (per es. $(y-2)^2 + (z-3)^2 - 25 = 0$; è un cilindro circolare retto, con direttrice parallela all'asse x , asse in $(y=+2); (z=+3)$; raggio 5).

Supponiamo ora che la retta per l'origine degli assi: $\boxed{\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}}$; sia parallela alla direttrice e quindi alle generatrici del cilindro. Il piano per l'origine degli assi normale alle generatrici del cilindro sarà quindi: $\boxed{lx + my + nz = 0}$.

Se vogliamo tracciare un cerchio su questo piano, dobbiamo trovare l'intersezione con una sfera, che, per semplicità, consideriamo anch'essa con centro nell'origine degli assi; avremo: $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$.

- Se fra queste due equazioni (del piano e della sfera) eliminiamo una variabile, per es. la z , troviamo l'equazione del cilindro ellittico con asse direttrice z , e per sezione retta: "l'ellisse" che risulta dalla proiezione su xy del cerchio intersezione delle due espressioni.

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2 = \left(\frac{l}{n}x + \frac{m}{n}y\right)^2$$

$$\boxed{(l^2 + m^2)x^2 + (m^2 + n^2)y^2 + 2lmxy - n^2R^2 = 0}$$

Sappiamo che la proiezione di un cerchio è un'ellisse che ha per semiasse maggiore il raggio del cerchio e per semiasse minore il raggio per il coseno dell'angolo di rotazione.

La retta di giacitura $\hat{i}$ del piano del cerchio, ha per coseni direttori:

$$\cos(\hat{x}\hat{i}) = \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad \cos(\hat{y}\hat{i}) = \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

$\cos(\hat{z}\hat{i}) = \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; perciò il semiasse minore dell'ellisse sarà: $b = \frac{nR}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $a = R$

L'equazione del cilindro con direttrice z è quindi l'equazione dell'ellisse sul piano xy ; ellisse solo ruotata perché ha il centro nel centro assi:

Ricordando (v. Volume II) che l'equazione di un'ellisse ad assi solo ruotati è del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

che confrontiamo con:

$$(l^2+m^2)x^2 + (m^2+n^2)y^2 + (2lm)xy - n^2R = 0$$

Nel problema inverso sulle coniche (v. Vol. II) abbiamo trovato che: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{-2a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}$ ore sostituendo

si ha: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{2n^2R^2}{(l^2+m^2+2n^2) \pm \sqrt{(l^2+m^2-2lm)^2 + 4l^2m^2}} = \frac{2n^2R^2}{(l^2+m^2)+2n^2 \mp (l^2+m^2)}$

che, com'è facile vedere, verificano i valori sopra indicati.

Più delicata è la questione angolare: le rette uscenti dall'origine degli assi ed inclinate dello stesso angolo γ rispetto all'asse z formano una superficie conica. Ciascuna di esse può essere retta di giacitura del piano contenente il cerchio di raggio " R ", che si proietta sul piano xy , secondo un'ellisse di semiassi: R ed $R \cos \delta$. Però, per ciascuna di dette, rette corrisponde una particolare rotazione degli assi dell'ellisse, rispetto agli assi x, y . Detto φ tale angolo, sappiamo (v. Vol II) che:

$$\varphi \setminus_{90+\varphi} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}} \right) \begin{cases} \text{se } a_{12} < 0 \\ \text{se } a_{12} > 0 \end{cases}$$

ove sostituendo abbiamo:

$$\varphi \setminus_{90+\varphi} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2lm}{l^2 - m^2} \right)$$

se consideriamo la proiezione sul piano xy del segmento di retta " R "; avremo: $\overline{OP} = b = R \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}$; da cui:



$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} \quad \text{sen } \varphi = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}}$$

$$\text{poiché } \operatorname{tg}(2\varphi) = \left(\frac{2}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} - \operatorname{tg}(\varphi)} \right);$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2}{\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}} = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \frac{2lm / (l^2 + m^2 + m^2)}{(l^2 - m^2) / (l^2 + m^2 + m^2)}$$

ritorna:

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2lm}{l^2 - m^2}}$$

Analogamente se dalle due equazioni del piano e della sfera, avessimo eliminato la x o la y , avremmo trovato un cilindro ellittico con direttrice x od y .

A noi interessa l'equazione del cilindro circolare avente per direttrice la retta: $\frac{x}{e} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

Una qualsiasi retta parallela a tale direttrice, e passante per un punto P , avrà per equazione:

$$\frac{x-x_p}{e} = \frac{y-y_p}{m} = \frac{z-z_p}{n}$$

che può ridursi:

$$\frac{x-x_p}{\cos \alpha} = \frac{y-y_p}{\cos \beta} = \frac{z-z_p}{\cos \gamma}$$

$$\text{ovv: } (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$$

Ovv: x_p, y_p, z_p sono le coordinate di un generico punto P_i di un luogo geometrico da definirsi.

Se conosciamo la sezione retta del cilindro questa sarà il luogo dei punti P_i . Tale sezione deve stare sul piano: $\boxed{\cos \alpha x_p + \cos \beta y_p + \cos \gamma z_p = 0}$ e sulla giacitura di tutti i piani ad esso paralleli.

Dall'equazione delle rette passanti per P_i abbiamo:

$$\begin{cases} x_p = x - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (y - y_p) \\ z_p = z - \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} (y - y_p) \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione del piano normale:

$$\cos \alpha \left(x - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (y - y_p) \right) + \cos \beta y_p + \cos \gamma \left(z - \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} (y - y_p) \right) = 0$$

possiamo scrivere:

$$(\cos \alpha) x - \left(\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \delta}{\cos \beta} \right) y + (\cos \delta) z + \left(\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta}{\cos \beta} \right) y_p = 0$$

$$\text{ma: } (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta) = 1 \quad ; \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \delta) = (1 - \cos^2 \beta)$$

$$(\cos \alpha) x - \left(\frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos \beta} \right) y + (\cos \delta) z + \frac{y_p}{\cos \beta} = 0$$

da cui:

$$y_p = (1 - \cos^2 \beta) y - (\cos \beta \cos \alpha) x - (\cos \beta \cos \delta) z$$

$$\frac{y - y_p}{\cos \beta} = (\cos \alpha) x + (\cos \beta) y + (\cos \delta) z$$

$$\text{dalla: } x_p = x - \cos \alpha \left(\frac{y - y_p}{\cos \beta} \right)$$

$$x_p = (\cos^2 \beta + \cos^2 \delta) x - (\cos \alpha \cos \beta) y - (\cos \alpha \cos \delta) z$$

$$\text{analogamente dalla } z_p = z - \cos \delta \left(\frac{y - y_p}{\cos \beta} \right)$$

$$z_p = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) z - (\cos \alpha \cos \delta) x - (\cos \beta \cos \delta) y$$

$$\frac{x - x_p}{\cos \alpha} = \frac{y - y_p}{\cos \beta} = \frac{z - z_p}{\cos \delta} = (\cos \alpha) x + (\cos \beta) y + (\cos \delta) z$$

Se vogliamo che il nostro cilindro sia circolare, cioè abbia per sezione retta un cerchio; essendo un cerchio determinato dalla intersezione di un piano con una sfera, nel nostro caso, è necessario che "P" verifichi l'equazione della superficie sferica:

$$x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = R^2$$

Eleviamo a quadrato le coordinate di P sopra calcolate e sostituiamole nell'equazione della superficie sferica: (Per brevità di scrittura poniamo: $(l^2 + m^2 + n^2) = 1$

$$\cos \alpha = l \quad ; \quad \cos \beta = m \quad ; \quad \cos \gamma = n)$$

$$x_p^2 = (m^2 + n^2)x^2 + l^2 m^2 y^2 + l^2 n^2 z^2 - 2lm(m^2 + n^2)xy - 2ln(m^2 + n^2)xz + 2(l^2 mn)yz$$

$$y_p^2 = (l^2 m^2)x^2 + (l^2 n^2)y^2 + (m^2 n^2)z^2 - 2lm(l^2 + n^2)xy + 2(ln m^2)xz - 2nm(l^2 + n^2)yz$$

$$z_p^2 = (l^2 m^2)x^2 + (n^2 m^2)y^2 + (l^2 + m^2)z^2 + 2(lmn^2)xy - 2ml(l^2 + m^2)xz - 2nm(l^2 + m^2)yz$$

$$R^2 = (m^2 n^2)(l^2 + m^2 + n^2)x^2 + (l^2 + m^2)(l^2 m^2 + n^2)y^2 + (l^2 + m^2)(l^2 n^2 + m^2)z^2 + 2lm(l^2 - m^2 - n^2)xy - 2ln(l^2 - m^2 - n^2)xz - 2mn(l^2 + m^2 + n^2)yz$$

$$R^2 = (m^2 + n^2)x^2 + (l^2 + m^2)y^2 + (l^2 + m^2)z^2 - (2lm)xy - (2ln)xz - (2mn)yz$$

$$R^2 = (1 - l^2)x^2 + (1 - m^2)y^2 + (1 - n^2)z^2 - 2lmxy - 2lnxz - 2mnyz$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = (l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 + 2lmxy + 2lnxz + 2mnyz)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = (lx + my + nz)^2 \quad : \text{ torniamo ai simboli}$$

estesi:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = (\cos \alpha x + \cos \beta y + \cos \gamma z)^2$$

Che è l'equazione del nostro cilindro.

Cioè possiamo dire:

"L'equazione di un cilindro circolare avente per asse una retta per l'origine degli assi è data dall'uguaglianza dell'equazione della sfera al centro assi, (di raggio R uguale a quello della sezione cilindrica), con l'equazione del piano di sezione per l'origine, elevata a quadrato ed avente per coefficienti i coseni direttori.

Se spostiamo il centro assi in un punto C qualsiasi del piano, una tale equazione diventa l'equazione generale:

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 - R^2 = [\cos\alpha(x-x_c) + \cos\beta(y-y_c) + \cos\gamma(z-z_c)]^2$$

che è l'equazione di un cilindro circolare, avente l'asse direttrice passante per un punto C e di coseni direttori: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Cilindro al centro assi. (cioè con l'asse per O)
(problema inverso)

L'equazione:

$$(1 - \cos^2\alpha)x^2 + (1 - \cos^2\beta)y^2 + (1 - \cos^2\gamma)z^2 - 2(\cos\alpha\cos\beta)xy - 2(\cos\alpha\cos\gamma)xz - 2(\cos\beta\cos\gamma)yz = R^2$$

può scriversi

$$(\cos^2\beta + \cos^2\gamma)x^2 + (\cos^2\alpha + \cos^2\gamma)y^2 + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)z^2 - 2(\cos\alpha\cos\beta)xy - 2(\cos\alpha\cos\gamma)xz - 2(\cos\beta\cos\gamma)yz = R^2$$

moltiplicata per un K arbitrario si presenta:

$$(a)x^2 + (b)y^2 + (c)z^2 + (d)xy + (e)xz + (f)yz + (g) = 0$$

rendiamo $g < 0$
ovvero $K > 0$

Affinché sia un cilindro deve essere: $(a > 0; b > 0; c > 0); (g < 0)$
se fosse un cilindro al centro:

$$a = K(\cos^2\beta + \cos^2\gamma); \quad b = K(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma); \quad c = K(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$$

$$(a+b+c) = K(2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 2\cos^2\gamma) = 2K \quad K = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{(b+c-a)}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} = 2\cos^2\alpha + \cos^2\gamma + \cos^2\beta - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos^2\alpha$$

cioè: $\sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+c}} = \cos\gamma; \quad \sqrt{\frac{a-b+c}{a+b+c}} = \cos\beta; \quad \sqrt{\frac{-a+b+c}{a+b+c}} = \cos\alpha$

dovrà essere:

$$d = -2K\cos\alpha\cos\beta = -(a+b+c)\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)^2}} = -\sqrt{(a-b+c)(b+c-a)} = d$$

analogamente: $e = \sqrt{(a+b+c)(a-b-c)}$ $f = -\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}$

quindi:
$$R = \sqrt{\frac{2g}{(a+b+c)}}$$

dovendo essere: $-\frac{d}{R} = 2 \cos \alpha \cos \beta$; $-\frac{e}{R} = 2 \cos \alpha \cos \gamma$; $-\frac{f}{R} = 2 \cos \beta \cos \gamma$

$\frac{ed}{2Kf} = -\cos^2 \alpha$; $\frac{df}{2Ke} = -\cos^2 \beta$; $\frac{ef}{2Kd} = -\cos^2 \gamma$; avremo:

$$\frac{ed}{2f} + \frac{df}{2e} + \frac{ef}{2d} = \frac{d^2 e^2 + d^2 f^2 + e^2 f^2}{2edf} = -K = -\frac{a+b+c}{2}$$

che verifica essere l'equazione di un cilindro al centro assi,

esempio numerico

studiare l'equazione:

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 676 = 0$$

$a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $g < 0 \rightarrow$ può essere un cilindro

$$K = \frac{160 + 153 + 25}{2} = 169$$

$$\frac{24^2 \cdot 72^2 + 24^2 \cdot 96^2 + 72^2 \cdot 96^2}{- (2)(24)(72)(96)} = \frac{2985984 + 5308416 + 4777544}{- (165888) 2} = -169$$

è un cilindro al centro assi; per cui, dividendo per 169

sia: $\frac{160}{169}x^2 + \frac{153}{169}y^2 + \frac{25}{169}z^2 - 2\frac{12}{169}xy - 2\frac{36}{169}xz - 2\frac{48}{169}yz - \frac{676}{169} = 0$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{160}{169}} = \frac{3}{13}; \rightarrow \alpha = 76^\circ 39' 27''$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{153}{169}} = \frac{4}{13}; \rightarrow \beta = 72^\circ 04' 47''$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}; \rightarrow \gamma = 22^\circ 37' 12''$$

verifica: $2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \frac{3 \cdot 4}{169}$; $2 \cos \alpha \cos \gamma = 2 \frac{3 \cdot 12}{169}$; $2 \cos \beta \cos \gamma = 2 \frac{4 \cdot 12}{169}$

$$R = \sqrt{\frac{676}{169}} = 2.$$

Facciamo un disegno del cilindro:

disegno prospettico

Per $Z = 0$, l'equazione diventa quella di un'ellisse solo ruotata: cioè:

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - 676 = 0$$

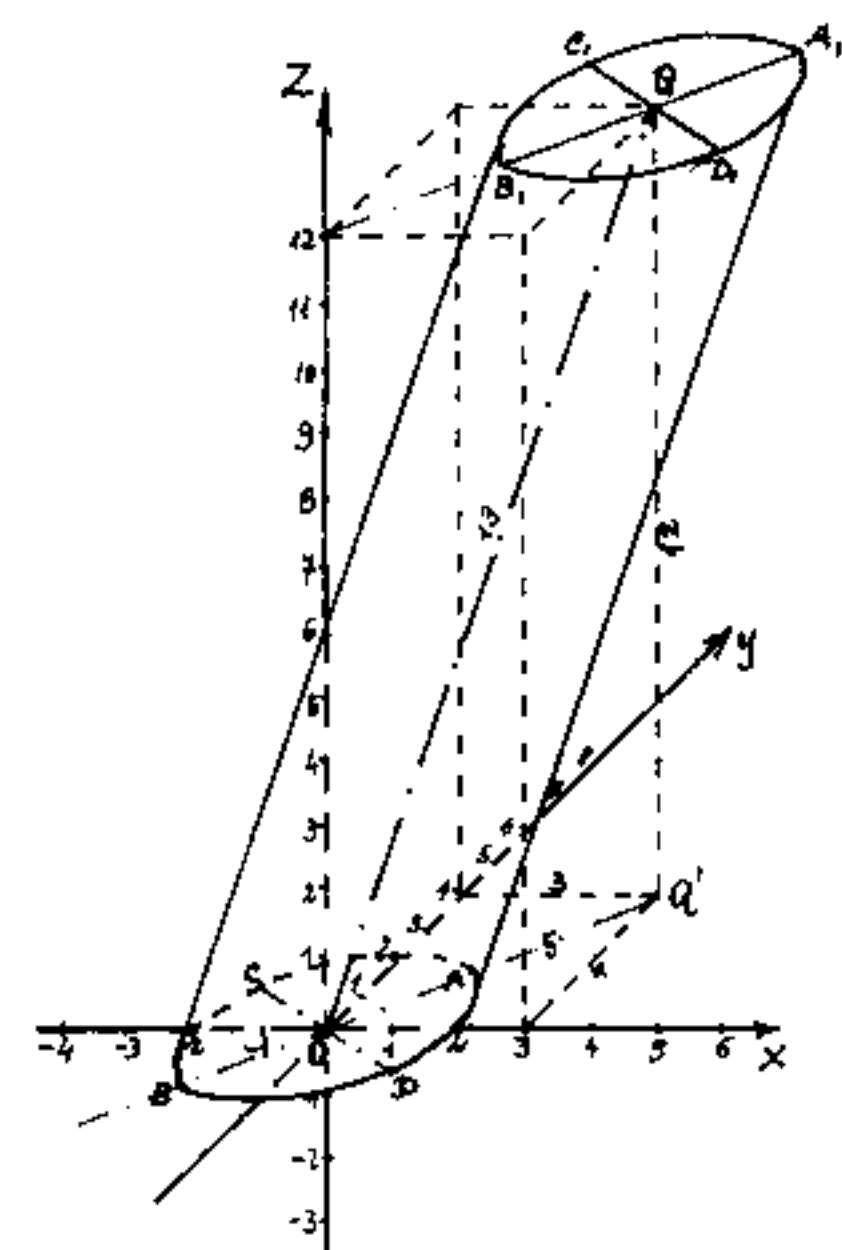
$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \right) = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-24}{160 - 153} \right)$$

$$\varphi \left. \begin{array}{l} \\ 90^\circ + \varphi \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-24}{7} \right) = \frac{90^\circ 00' 00''}{-36^\circ 52' 12''}$$

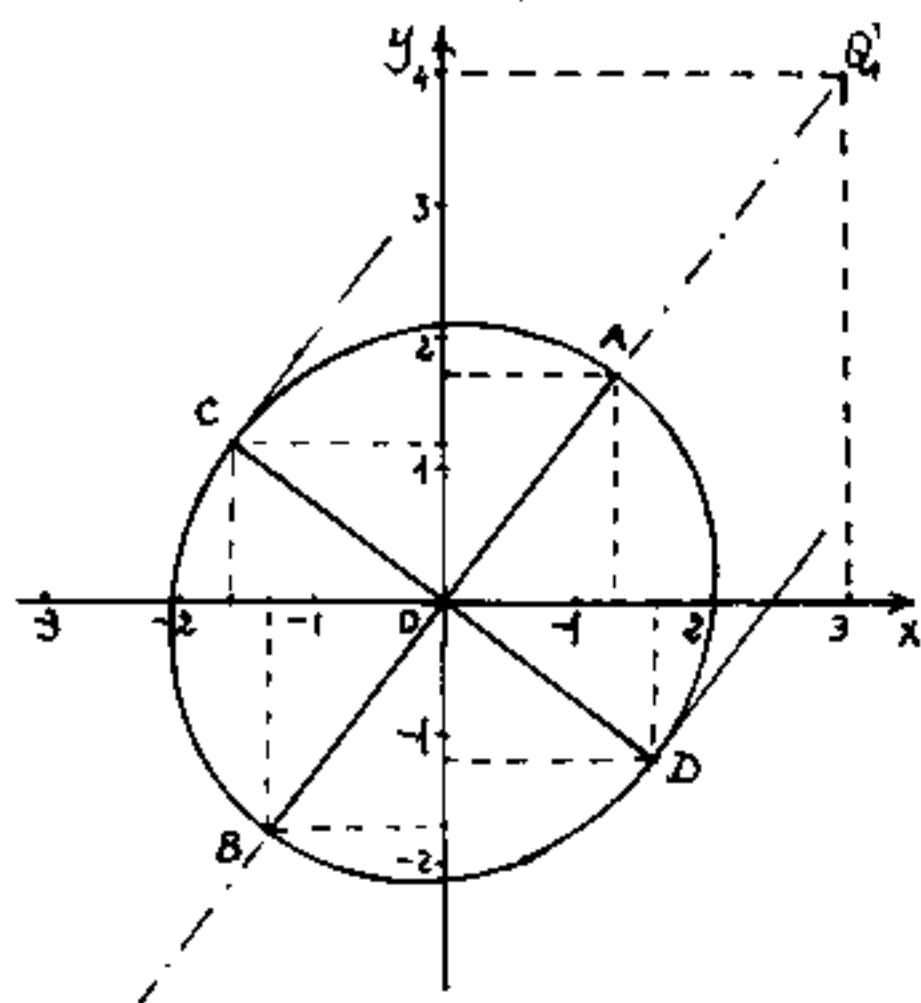
$$\varphi = \underline{\underline{53^\circ 07' 48''}}$$

$$a = 2 / \cos \delta = \frac{13}{12} 2 = \frac{13}{6} = 2,166\bar{6} = \overline{OA}$$

$$b = 2 = R = \overline{OC} = \overline{OD}$$



Notiamo che non è una proiezione della circonferenza di raggio 2, ma una sezione cilindrica inclinata, perciò il semiasse $a > R$.



Nel nostro caso era facile calcolare $\varphi = \arctg \left(\frac{4}{3} \right) = 53^\circ 07' 48''$.

Le coordinate di A, B, C, D, saranno:

$$m.o.: X_A = -X_B = \frac{3}{5} 2 = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$Y_A = -Y_B = \frac{4}{5} 2 = \frac{16}{5} = 3,2$$

$$+ X_D = -X_C = \frac{4}{5} 2 = 1,6$$

$$- Y_D = + Y_C = \frac{3}{5} 2 = 1,2$$

Ponendo $Z = 12$ si ottiene

l'equazione: $160x^2 + 153y^2 - 24xy - 864x - 1152y + 2924 = 0$ stesso ellisse

traslato in $Q \equiv (3, 4, 12)$ (dall'equazione appare in Q')

Nell'esempio numerico ora effettuato si nota che l'asse del cilindro congiunge i punti $O = (0, 0, 0)$ e $Q = (3, 4, 12)$ $\overline{OQ} = 13$ ed il punto Q si proietta nel I quadrante di xy . per cui: $\cos \alpha = \frac{3}{13}$; $\cos \beta = \frac{4}{13}$; $\cos \gamma = \frac{12}{13}$.

Vogliamo vedere se Q si proiettasse nel II quadrante di xy , cioè se $\cos \alpha = \frac{-3}{13}$ come diventa l'equazione (fermo restando $K=169$)

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 + 24xy + 72xz - 96yz - 676 = 0$$

quindi sono cambiati i segni solo dei coefficienti "d", "e" avremo quindi la seguente tabella sui segni:

d	e	f	quadrante	note	zero possibilità $zQ < 0$	
-	-	-	I	con $q < 0$ $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$	$\cos \alpha > 0, \cos \beta > 0$	$\cos \alpha < 0, \cos \beta < 0$
+	+	-	II		$\cos \alpha < 0, \cos \beta > 0$	$\cos \alpha > 0, \cos \beta < 0$
-	+	+	III		$\cos \alpha < 0, \cos \beta < 0$	$\cos \alpha > 0, \cos \beta > 0$
+	-	+	IV		$\cos \alpha > 0, \cos \beta < 0$	$\cos \alpha < 0, \cos \beta > 0$
					$\cos \gamma > 0$	$\cos \gamma < 0$

Dalla quale è possibile individuare subito la direzione dell'asse del cilindro al centro.

Affrontiamo ora il problema del cilindro circolare in posizione qualsiasi rispetto agli assi; cioè abbia per direttrice la retta:

$$\frac{x - x_c}{e} = \frac{y - y_c}{m} = \frac{z - z_c}{n}$$

Equazione generale del cilindro

Consideriamo un polinomio completo di secondo grado, nelle variabili: x, y, z ; indicizziamo: x con 1, y con 2, z con 3 ed i termini noti o costanti con 4; (si noti che per le coniche il polinomio di secondo grado era $\tilde{u}$ $\tilde{u}$ in due variabili per cui le costanti hanno indice 3)

Nell'esempio precedente (caso particolare di cilindro avente l'asse direttrice passante per l'origine degli assi) abbiamo indicato: a, b, c, d, e, f, g che corrispondono: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, 2a_{12}, 2a_{13}, 2a_{23}, a_{44}$ (mancono i coefficienti di x, y, z .)

Il nostro polinomio completo sarà

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Se "c" è un punto qualsiasi dell'asse direttrice di un cilindro circolare, possiamo traslare da 0 a c la nostra equazione del cilindro al centro, ed avremo:

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 - R^2 = [\cos\alpha(x-x_c) + \cos\beta(y-y_c) + \cos\gamma(z-z_c)]^2$$

Sviluppando il quadrato al secondo membro si ha:

$$(1 - \cos^2\alpha)(x-x_c)^2 + (1 - \cos^2\beta)(y-y_c)^2 + (1 - \cos^2\gamma)(z-z_c)^2 - 2(\cos\alpha\cos\beta)(x-x_c)(y-y_c) - 2(\cos\alpha\cos\gamma)(x-x_c)(z-z_c) - 2(\cos\beta\cos\gamma)(y-y_c)(z-z_c) - R^2 = 0$$

Sviluppiamo ora i quadrati e i prodotti della traslazione di assi;

avremo:

$$(1 - \cos^2 \alpha) x^2 + (1 - \cos^2 \beta) y^2 + (1 - \cos^2 \gamma) z^2 - 2(\cos \alpha \cos \beta) xy - \\ - 2(\cos \alpha \cos \gamma) xz - 2(\cos \beta \cos \gamma) yz - R^2 \dots \dots \dots$$

Questa parte di equazione è identica a quella del cilindro al centro assi, continuando lo sviluppo si ha:

$$\dots \dots \dots - 2[(1 - \cos^2 \alpha) x_c - (\cos \alpha \cos \beta) y_c - (\cos \alpha \cos \gamma) z_c] x + \\ - 2[(1 - \cos^2 \beta) y_c - (\cos \alpha \cos \beta) x_c - (\cos \beta \cos \gamma) z_c] y + \\ - 2[(1 - \cos^2 \gamma) z_c - (\cos \beta \cos \gamma) y_c - (\cos \alpha \cos \gamma) x_c] z +$$

$$+ [(1 - \cos^2 \alpha) x_c^2 + (1 - \cos^2 \beta) y_c^2 + (1 - \cos^2 \gamma) z_c^2 - 2(\cos \alpha \cos \beta) x_c y_c - 2(\cos \alpha \cos \gamma) x_c z_c - 2(\cos \beta \cos \gamma) y_c z_c] = 0$$

Poiché questa seconda parte dello sviluppo è funzione dei coefficienti della prima parte, possiamo scrivere:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2a_4 xy + 2a_5 xz + 2a_6 yz \quad \left(\begin{array}{l} \text{equazione al centro} \\ \text{coefficienti di orientamento} \\ \text{e dimensionamento} \end{array} \right) \\ - 2(a_{11} x_c + a_{12} y_c + a_{13} z_c) x - \\ - 2(a_{21} y_c + a_{22} x_c + a_{23} z_c) y - \\ - 2(a_{31} z_c + a_{32} y_c + a_{33} x_c) z + \\ + [(a_1 x_c^2 + a_2 y_c^2 + a_3 z_c^2 + 2a_4 x_c y_c + 2a_5 x_c z_c + 2a_6 y_c z_c) - R^2] \quad (\text{termine noto})$$

Si noti che a_{11} è l'intera equazione al centro (escluso R^2) ove al posto delle variabili si sono poste le coordinate di "c".

occorre fare molta attenzione ai segni dei coefficienti: a_{11}, a_{22}, a_{33} , debbono tutti e tre essere maggiori di zero, se non lo sono, si può moltiplicare l'intera equazione per (-1) ; ma se il loro segno è discorde, cioè, non sono tutti e tre dello stesso segno ciò vuol dire che l'equazione non rappresenta un cilindro.

L'esame del polinomio completo di secondo grado, sarà fatto dopo aver trattato il cono. Comunque fin da ora possiamo dire che, se nel polinomio di 2° grado consideriamo la intersezione con un piano qualsiasi la curva sarà una conica (reale se l'intersezione avviene realmente, degenera, o immaginaria se l'intersezione non avviene). (Piano parallelo al cilindro).

Per ora possiamo dire:

se: $a_{11} = a_{22} = a_{33}$; $2a_{12} = 2a_{13} = 2a_{23} = 0$; l'equazione è una sfera. ove: $a_{14} = x_c$; $a_{24} = y_c$; $a_{34} = z_c$; $R^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - a_{44}$.

se a_{11}, a_{22}, a_{33} sono dello stesso segno, (che rendiamo positivo), e se le sezioni con piani paralleli danno le stesse figure, ugualmente orientate, tra pure traslate; l'equazione è un cilindro. Ma cerchiamo di definire meglio queste sezioni.

Ponendo uguale a zero, oppure ad un valore costante una qualsiasi delle tre variabili (per es la z) otteniamo l'intersezione con il piano che ha per retta di giacitura l'asse posto uguale a zero oppure = costante. (per es xy). Il polinomio si riduce all'espressione di una conica, infatti eliminando i termini, (per esempio in z), abbiamo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0$$

Ove, (vedi Vol II), il termine noto è indicato con a_{44} anziché con a_{33} perché l'indice 3 è stato assunto per la z .

Quindi avremo: (ricordando che $a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta \begin{cases} = 0 = \text{conica degenere} \\ \neq 0 = \text{conica non degenere} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \text{ caso ellittico} \\ = 0 \text{ caso parabolico} \\ < 0 \text{ caso iperbolico} \end{cases} \begin{cases} \Delta a_{11} > 0; \Delta a_{22} > 0 = \text{ellisse immaginaria} \\ \Delta a_{11} < 0; \Delta a_{22} < 0 = \text{ellisse reale} \end{cases}$$

sostituendo i valori nel minore del determinante abbiamo:

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos^2 \alpha) & -\cos \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta & (1 - \cos^2 \beta) \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \underline{\cos^2 \gamma}$$

che, necessariamente, essendo un quadrato; $\cos^2 \gamma > 0$ e quindi l'intersezione è un caso ellittico; affinché sia reale, avendo ridotto $a_{11} > 0; a_{22} > 0$ deve essere: $\Delta < 0$.

Per assicurarci che è un cilindro; nell'equazione, al posto della z , poniamo una costante H arbitraria; avremo: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + f_1(H)x + f_2(H)y + (a_{33} + f_3(H)) = 0$

Dovremo trovare la stessa sezione che per $z=0$; cioè lo stesso ellisse con la stessa rotazione di assi, con gli stessi assi, solo traslato. Infatti (v. II volume) i coefficienti $f_1(H)$ ed $f_2(H)$ servono per trovare le coordinate del centro dell'ellisse spostato, ma non influenzano né la rotazione, né le dimensioni degli assi dell'ellisse, ciò può essere verificato, riducendo le due espressioni per $z=0$ e per $z=H$ all'espressione dell'ellisse ad assi solo ruotati. (Qualora non variasse la rotazione degli assi, ma variassero le dimensioni della sezione, mantenendo lo stesso rapporto, l'equazione rappresenterebbe un cono.)

Facciamo una analisi del significato dei coefficienti:

$$\begin{aligned}
 a_{11}/K &= (1 - \cos^2 \alpha) = (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = (\sin^2 \alpha) & (a) \\
 a_{22}/K &= (1 - \cos^2 \beta) = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) = (\sin^2 \beta) & (b) \\
 a_{33}/K &= (1 - \cos^2 \gamma) = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = (\sin^2 \gamma) & (c) \\
 a_{12}/K &= (-\cos \alpha \cos \beta) = \frac{1}{K} \sqrt{(-a_{11} + a_{22} + a_{33})(a_{11} - a_{22} + a_{33})} & (d) \\
 a_{13}/K &= (-\cos \alpha \cos \gamma) = \frac{1}{K} \sqrt{(-a_{11} + a_{22} + a_{33})(a_{11} + a_{22} - a_{33})} & (e) \\
 a_{23}/K &= (-\cos \beta \cos \gamma) = \frac{1}{K} \sqrt{(a_{11} - a_{22} + a_{33})(a_{11} + a_{22} - a_{33})} & (f) \\
 \left. \begin{aligned}
 a_{14}/K &= (-(1 - \cos^2 \alpha)x_c + (\cos \alpha \cos \beta)y_c + (\cos \alpha \cos \gamma)z_c) \\
 a_{24}/K &= (-(1 - \cos^2 \beta)y_c + (\cos \alpha \cos \beta)x_c + (\cos \beta \cos \gamma)z_c) \\
 a_{34}/K &= (-(1 - \cos^2 \gamma)z_c + (\cos \beta \cos \gamma)y_c + (\cos \alpha \cos \gamma)x_c)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{questi coefficienti} \\ &\text{sono nulli nel} \\ &\text{caso di cilindro al} \\ &\text{centro assi} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$K = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{2}$

$$a_{44} = (a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 + 2a_{12}x_cy_c + 2a_{13}x_cz_c + 2a_{23}y_cz_c - R^2)$$

notiamo che:

$$a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13}z_c = -a_{14}$$

$$a_{12}x_c + a_{22}y_c + a_{23}z_c = -a_{24}$$

$$a_{13}x_c + a_{23}y_c + a_{33}z_c = -a_{34}$$

Il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}A_{33} - a_{23}A_{22} + a_{13}A_{13} = \Delta$$

$$\Delta = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

sostituiamo i valori dei coefficienti:

$$\begin{aligned} & (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - \cos^2\alpha\cos^2\beta = (+\cos^2\alpha\cos^2\delta + \cos^2\beta\cos^2\delta) \\ & + (\cos\beta\cos\delta)(1 - \cos^2\alpha)(-\cos\beta\cos\delta) - (-\cos\alpha\cos\beta)(\cos\alpha\cos\delta) = (-\cos^2\beta\cos^2\delta) \\ & (-\cos\alpha\cos\delta)[(-\cos\alpha\cos\beta)(\cos\beta\cos\delta) - (\cos\alpha\cos\delta)(1 - \cos^2\beta)] = (-\cos^2\alpha\cos^2\delta) \end{aligned}$$

sommando si ha: $\Delta = 0$

Cioè le tre equazioni non sono indipendenti, ma sono combinazioni lineari, (si può dimostrare che il sistema è indeterminato)

Cioè implica che possiamo attribuire un valore arbitrario ad una coordinata per ricavare il valore delle altre due. (conviene in questi casi porre $z=0$, oppure $x=0$, oppure $y=0$, per determinare l'asse dell'ellindro.

Esempio numerico

studiare l'equazione:

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 1160x - 1434y + 768z + 5229 = 0$$

I primi sei coefficienti sono quelli dell'esempio precedente, per cui: $K = 169$; $\cos \alpha = \frac{3}{13}$; $\cos \beta = \frac{4}{13}$; $\cos \gamma = \frac{12}{13}$;

Qualora i primi sei coefficienti fossero stati diversi, si sarebbero ripetuti i procedimenti dell'esempio precedente per determinare K ed i coseni direttori.

Abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} 160x - 12y - 36z = +580 \\ -12x + 153y - 48z = +717 \\ -36x - 48y + 25z = -384 \end{cases}$$

che sappiamo essere indeterminato, infatti dividendo per 4 la prima riga, per 3 la seconda, e sommandole:

$$40 - 3 - 9 = 145$$

$$\frac{-4 + 51 - 16 = 239}{+36 + 48 - 25 = +384}$$

abbiamo la III riga cambiata di segno.

Ponendo $z_c = 0$, e considerando le prime due equazioni

$$\begin{vmatrix} 40 & -3 \\ -4 & 51 \end{vmatrix} = 2040 - 12 = 2028; \quad \begin{vmatrix} 145 & -3 \\ 239 & 51 \end{vmatrix} = 7395 + 717 = 8112;$$

$$x_c = \frac{8112}{2028} = 4; \quad \begin{vmatrix} 40 & 145 \\ -4 & 239 \end{vmatrix} 9560 + 580 = 10140; \quad y_c = \frac{10140}{2028} = 5$$

$$C = (4, 5, 0)$$

Nell'esempio precedente abbiamo calcolato che per $z=12$ l'asse passava per il punto $Q=(3,4,12)$ sostituiamo $z=12$ nelle equazioni ed avremo

$$\begin{cases} 40x - 3y - 9 \cdot 12 = 145 \\ -4x + 51y - 16 \cdot 12 = 239 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40x - 3y = 253 \\ -4x + 51y = 431 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 253 & -3 \\ 431 & 51 \end{vmatrix} = 12903 + 1293 = 14196 ; \quad \frac{14196}{2028} = x_Q = 7$$

$$\begin{vmatrix} 40 & 253 \\ -4 & 431 \end{vmatrix} = 17240 + 1012 = 18252 ; \quad \frac{18252}{2028} = y_Q = 9$$

Quindi se alle coordinate di Q , (che aveva nel cilindro all'origine assi) aggiungiamo le coordinate di $\tilde{C}$ si ha:

$$x_Q = 3 + x_C = (3+4) = x(Q) = 7$$

$$y_Q = 4 + y_C = (4+5) = y(Q) = 9$$

$$z_Q = 12 + z_C = (12+0) = z(Q) = 12$$

Ponendo $z=0$ nell'equazione data si ha:

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - 1160x - 1434y + 5229 = 0$$

che è la conica intersezione col piano xy .

$$\Delta = \begin{vmatrix} -160 & -12 & -580 \\ -12 & 153 & -717 \\ -580 & -717 & 5229 \end{vmatrix} \begin{aligned} & 5129(24480 - 144) = 5129(24336) = 124819344 \\ & + 717(114720 + 6960) = -717(121680) = -87244560 \\ & -580(8604 + 88740) = -580(97344) = -56459520 \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ determinate } \neq 0 \text{ (conica non degenera)} \quad \Delta = -18884736$$

$A_{33} = 24336 > 0$ perciò caso ellittico.

Δa_{11} e $\Delta a_{22} < 0$ perciò ellisse reale

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{97344}{24336} = x_c = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{valore che avevamo già} \\ \text{trovato} \end{array} \right)$$

$$\frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{121680}{24336} = y_c = 5 \quad \left(\begin{array}{l} \text{valore che avevamo già} \\ \text{trovato} \end{array} \right)$$

Sostituendo questi valori (vedi volume 2°) nell'espressione di a_{33} dell'ellisse ruotato e traslato si ha

$$K_{1,1}^2 = 160x_c^2 + 153y_c^2 - 24x_cy_c - 5229$$

$$K_{1,1}^2 = +676$$

abbiamo l'espressione dell'ellisse prima della traslazione

cioè solo ruotato: $160x^2 + 153y^2 - 24xy - 676 = 0$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2K_{1,1}^2}{(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_{12}^2}} = \frac{+2(676)}{(160+153) \pm \sqrt{(160-153)^2 + (24)^2}}$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{+1352}{313 \pm \sqrt{49+576}} = \frac{1352}{313 \pm 25} = \frac{1352}{313 \mp 25} = \frac{1352}{288} = 4,6944$$

$$s_1 = \boxed{a = 2,1666} \quad ; \quad \boxed{s_2 = b = 2}$$

che sono i semiassi dell'ellisse di centro $c \equiv (4,5,0)$

intersezione del cilindro col piano xy .

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2a_{12}}{(a_1 - a_2)} \right) = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-24}{7} \right) = \frac{1}{2} (180 - 73,7398) =$$

$$\boxed{\varphi = 53^\circ 07' 48''} \quad (\text{con verso antiorario})$$

(Valori che avevamo già trovati nell'esempio precedente.

Qualora avessimo sezionato il cilindro con un piano $z=12$ abbiamo visto che il centro si sposta nel punto (Q) ove $(Q) \equiv (7, 9, 12)$; ponendo $z=12$ nell'equazione data abbiamo:

$$160x^2 + 153y^2 + 25 \cdot (12)^2 - 24xy - 96 \cdot 12y - 72 \cdot 12x - 1160x - 1434y + 768 \cdot 12z + 5229 = 0$$

cioè:

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - (1160 + 864)x - (1434 + 1152)y + (3600 + 9216 + 5229) = 0$$

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - 2024x - 2586y + 18045 = 0$$

Si ha una equazione di una conica che differisce solo nei coefficienti: $2a_{14}$, $2a_{24}$, a_{44} dalla precedente.

$$\begin{vmatrix} 160 & -12 & -1012 \\ -12 & 153 & -1293 \\ -1012 & -1293 & 18045 \end{vmatrix} \begin{matrix} 18045 (24336) = \\ A_{33} \\ + 1293 (-206880 - 12144) \\ - A_{33} (-219024) \\ - 1012 (+15516 + 154836) \\ A_{33} = (170352) \end{matrix} \begin{matrix} = +439143120 \\ = -283198032 \\ = -172396224 \\ = -66887496 \end{matrix}$$

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{170352}{24336} = x_{(Q)} = 7; \quad \frac{A_{32}}{A_{33}} = \frac{219024}{24336} = y_{(Q)} = 9$$

valori che avevamo già trovato. Il valore del determinante minore di terzo (come nel caso precedente) con $A_{33} > 0$ ci determina che la conica è un'ellisse reale di centro: $(Q) = (7, 9, 12)$ e assi e rotazione immutati perché calcolabili con gli stessi coefficienti: a_{11} , a_{22} , $2a_{12}$: $a = 2,166\bar{6}$; $b = 2$; $\varphi = 53^\circ 07' 48''$

Tuttocio conferma che l'equazione data è un cilindro che interseca il piano xy con un'ellisse di centro $C \equiv (4, 5, 0)$, ruotato di $\varphi = 53^\circ 07' 48''$ con assi $a = 2,166\bar{6}$; $b = 2$.

Sezione retta di un cilindro circolare

L'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

sia di un cilindro. Un piano perpendicolare avrà per rette di giacitura la direttrice e le generatrici del cilindro, perciò avrà per equazione: $(K = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{2})$

$$\left(\sqrt{1 - \frac{a_{11}}{K}}\right)x + \left(\sqrt{1 - \frac{a_{22}}{K}}\right)y + \left(\sqrt{1 - \frac{a_{33}}{K}}\right)z + \sigma = 0$$

(ove σ è la distanza del piano dall'origine degli assi.) Le due equazioni rappresentano la sezione retta del cilindro, ma trattandosi di una linea spaziale, è difficile riconoscere subito di quale curva si tratti.

Poiché il polinomio del cilindro, è un polinomio di secondo grado in x, y, z , l'intersezione con qualsiasi piano è una conica. Supponiamo che, nelle sezioni coi piani: $z=0$; $y=0$; $x=0$; si siano trovati tre casi ellittici; con ciò resta l'ambiguità di sapere se trattasi di un cilindro ellittico, o di un cilindro circolare. Questa ambiguità è presto risolta:

Se con l'intersezione del piano $z=0$ abbiamo trovato l'ellissi di semiasse "a" e "b" con "a" > "b" ed: $a(\cos \delta) = b$, allora il cilindro è circolare di raggio b.

Cioè dovrà essere:

$$\sqrt{\frac{K \cdot I_1^2 \cdot I_2^2}{(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}} \cdot \sqrt{\frac{a_{11} + a_{22} - a_{33}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}} = \sqrt{\frac{K \cdot I_1^2 \cdot I_2^2}{(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}}$$

elevando a quadrato e semplificando si ha:

$$\left[(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} \right] \left[(a_{11} + a_{22}) + a_{33} \right] = \left[(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} \right] \left[(a_{11} + a_{22}) - a_{33} \right]$$

$$\begin{aligned} & (a_{11} + a_{22})^2 + a_{33}(a_{11} + a_{22}) - a_{33}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} - (a_{11} + a_{22})\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} = \\ & = (a_{11} + a_{22})^2 - a_{33}(a_{11} + a_{22}) - a_{33}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} + (a_{11} + a_{22})\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} \end{aligned}$$

$$2a_{33}(a_{11} + a_{22}) = 2(a_{11} + a_{22})\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}$$

$$\boxed{a_{33} = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$$

condizione affinché il cilindro abbia sezione retta circolare

verifichiamo il nostro cilindro dell'esempio numerico

$$25 = \sqrt{(160 - 153)^2 + (24)^2}$$

$$25 = \sqrt{(7)^2 + 24^2} =$$

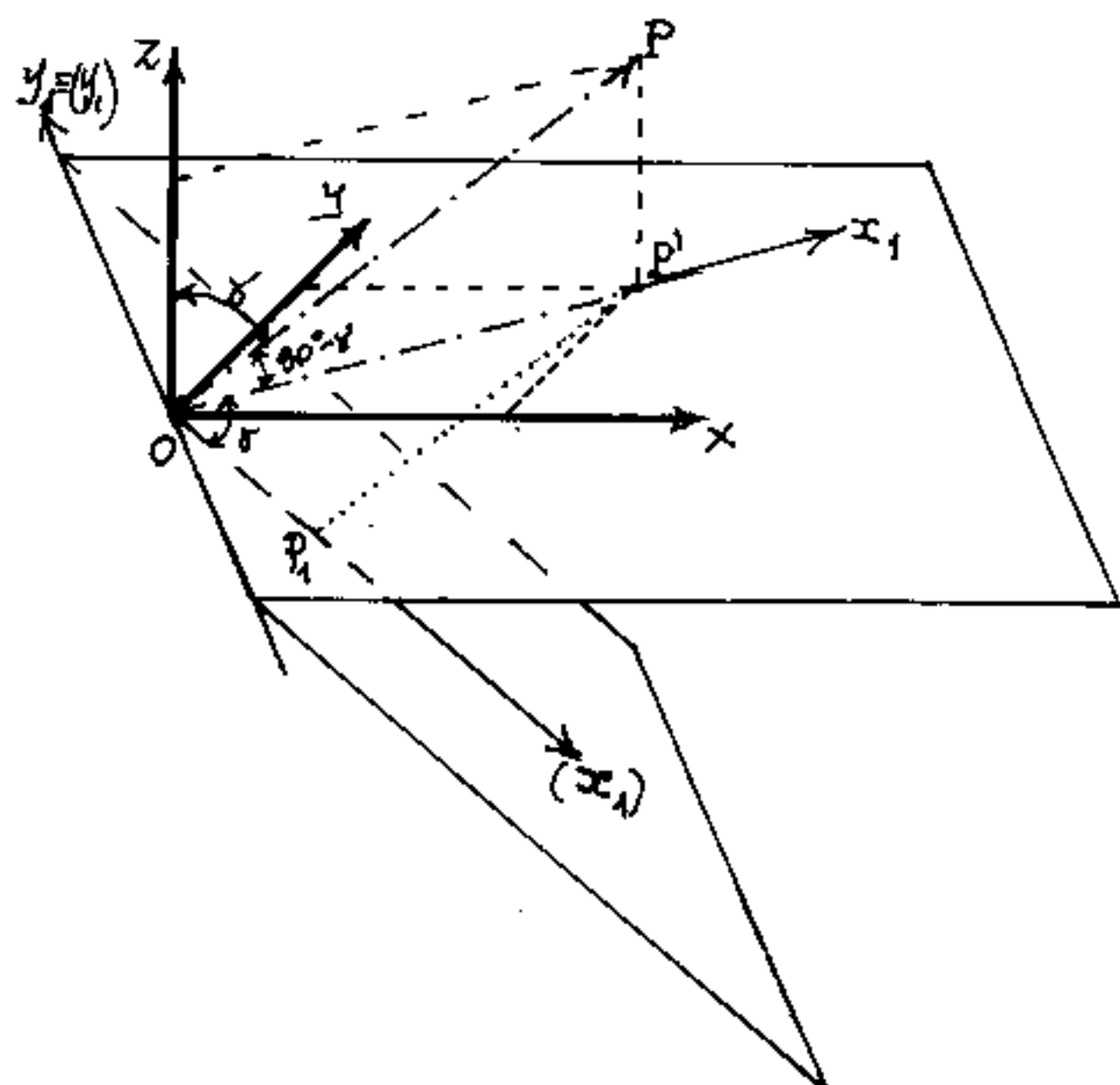
$$25 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625}$$

Verificato

oppure: avendo: $a_{33} = (1 - \cos^2 \gamma) = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)$

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} &= \sqrt{[(1 - \cos^2 \alpha) - (1 - \cos^2 \beta)]^2 + (2\cos \alpha \cos \beta)^2} \\ &= \sqrt{(-\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)^2 + (2\cos \alpha \cos \beta)^2} = \\ &= \sqrt{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)^2} = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = a_{33}. \end{aligned}$$

Sezione retta in generale



Sia $\vec{OP}$ una direzione riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $oxyz$ dai coseni direttori: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, tali che il piano per l'origine "O" degli assi e normale alla direzione $\vec{OP}$ abbia per equazione:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = 0$$

consideriamo il piano passante per z e per la retta $\vec{OP}$, esso intersecherà il piano xy secondo la retta ox_1 che assumiamo come nuova ascissa e la sua perpendicolare oy_1 che assumiamo come nuova ordinata, entrambe sul piano xy . Cioè le figure sul

piano xy , possiamo riferirle agli assi ruotati x_1, y_1 . (Le figure sul piano xy sono le sezioni del cilindro di direttrice $\vec{OP}$ ottenute ponendo $z=0$ nella sua equazione).

Consideriamo ora il piano normale ad $\vec{OP}$ (sul quale c'è la sezione retta del cilindro) e su questo piano consideriamo un nuovo sistema di assi: $O(y_1)(x_1)$, ove le ordinate $(y_1) = y$ si proiettano invariate, mentre le ascisse (x_1) sono accorciate rispetto ad x , cioè: $\boxed{(x_1) = x_1(\cos \gamma)}$. Ciò consente di avere la sezione retta in funzione delle coordinate $(x_1)(y_1)$.

Esempio numerico:

Sezione retta del cilindro:

$$\boxed{160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 1160x - 1434y + 768z + 5229 = 0}$$

essendo lo stesso cilindro dell'esempio precedente, sappiamo già che: $K=169$, $\cos \alpha = \frac{3}{13}$; $\cos \beta = \frac{4}{13}$; $\cos \gamma = \frac{12}{13}$; $\sin \gamma = \frac{5}{13}$ e che per $z=0$ si ha l'equazione:

$$\boxed{160x^2 + 153y^2 - 24xy - 1160x - 1434y + 5229 = 0}$$

che dobbiamo riferire agli assi ruotati Ox_1, y_1 .

L'angolo di rotazione degli assi sia $\varphi = \angle xOx_1$, avremo:

Dalle formule per la rotazione degli assi (vedi II volume)

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases}$$

si ricava:

$$\begin{cases} x^2 = x_1^2 \cos^2 \varphi + y_1^2 \sin^2 \varphi - 2 x_1 y_1 \sin \varphi \cos \varphi \\ y^2 = x_1^2 \sin^2 \varphi + y_1^2 \cos^2 \varphi + 2 x_1 y_1 \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

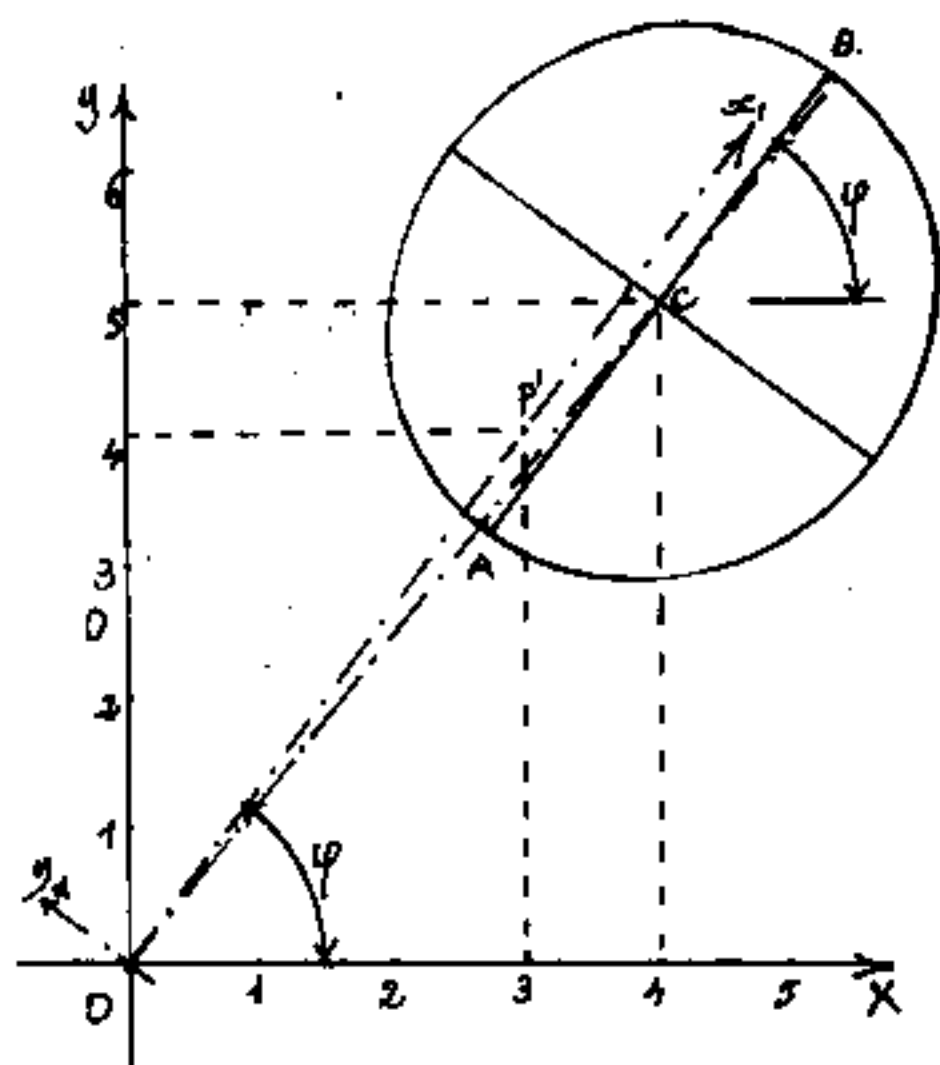
ed anche:

$$xy = x_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - y_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - x_1 y_1 \sin^2 \varphi + x_1 y_1 \cos^2 \varphi$$

cioè:

$$xy = x_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - y_1^2 \sin \varphi \cos \varphi + x_1 y_1 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Per fare le sostituzioni occorre calcolare: $(\sin \varphi)$ e $(\cos \varphi)$.



Come si vede dalla figura a fianco, non possiamo fare la sostituzione direttamente nella formula traslata perché C risulterebbe che non insiste sulle ascisse x_1 . Se prendessimo per x_1 la $\overline{OC}$ su $\overline{OC}$ non figura il massimo semidiametro dell'ellisse.

Quindi per cilindri traslati occorre prima riportarli al centro e poi fare la

rotazione degli assi. (Questo problema è l'analogo dell'ellisse ruotata e traslata che abbiamo trattato nel II volume, ove per ottenere la formula dovevamo prima fare la rotazione e poi la traslazione. Qui dobbiamo prima riportare al centro e poi ruotare. Cioè in generale la rotazione deve essere fatta su figure al centro anzi quando debbono traslare o quando siamo già traslate.)

Avremo quindi:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP} \cos \alpha}{\overline{OP} \sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{3}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP} \cos \beta}{\overline{OP} \sin \gamma} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} = \frac{4}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{5}\right)^2 = 1. \quad (\text{verificato}).$$

$$\varphi = 53^\circ 07' 48'' \quad (\text{valore già trovato})$$

L'equazione: $160x^2 + 153y^2 - 24xy - 1160x + 1434y + 5229 = 0$

riportata al centro assi, cioè solo ruotata, abbiamo visto che risulta: $160x^2 + 153y^2 - 24xy - 676 = 0$, sostituendo:

$$160 \left(x_1^2 \cdot \frac{9}{25} + y_1^2 \cdot \frac{16}{25} - 2x_1y_1 \cdot \frac{12}{25} \right) = \frac{1}{25} (1440x_1^2 + 2560y_1^2 - 3840x_1y_1)$$

$$153 \left(x_1^2 \cdot \frac{16}{25} + y_1^2 \cdot \frac{9}{12} + 2x_1y_1 \cdot \frac{12}{25} \right) = \frac{1}{25} (2448x_1^2 + 1377y_1^2 + 3888x_1y_1)$$

$$-24 \left(x_1^2 \cdot \frac{12}{25} - y_1^2 \cdot \frac{12}{25} + x_1y_1 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) \right) = \frac{-1}{25} (-288x_1^2 + 288y_1^2 + 168x_1y_1)$$

$$\frac{25}{25} (-676) + \frac{1}{25} (3600x_1^2 + 4225y_1^2 + 0)$$

cioè: $3600x_1^2 + 4225y_1^2 - 16900 = 0$ e dividendo per 5 si

ha:

$$\boxed{720x_1^2 + 845y_1^2 - 3380 = 0} \quad \text{mancono i termini in}$$

x_1 ed y_1 l'equazione può ridursi

$$\boxed{12^2x_1^2 + 13^2y_1^2 = 4 \cdot 13^2} \quad \text{cioè: un'ellisse al centro:}$$

$$\frac{x_1^2}{(13/6)^2} + \frac{y_1^2}{(2)^2} = 1 \quad \text{ove: } \begin{cases} a = 13/6 = 2,166\bar{6} \\ b = 2 \end{cases}$$

Si noti che riportando questo ellisse in $C \equiv (4, 5, 0)$ del sistema $x_c = 4, y_c = 5, z_c = 0$ nei nuovi assi avrebbe il riferito ad x_1, y_1 e cioè $x_{1c} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6,40312$ ed $y_{1c} = 0$ mentre facendo la rotazione senza riportare al centro avremmo erroneamente trovato $x_{1c} = 6,40000$ $y_{1c} = -2$.

$$\left[\frac{b}{a} = \frac{2}{13/6} = \frac{12}{13} = \cos \gamma \rightarrow (\text{me. circolare}) \right]$$

Trasportiamo ora l'equazione al centro sul piano $(x_1); (y_1)$ ad $x_1 = (x_1)/\cos \gamma = (x_1) \cdot 13/12$

$$x_1^2 = \left((x_1) \cdot \frac{13}{12} \right)^2; \quad (y_1) = y_1 \quad \text{perci\u00f2:}$$

$$12^2 \cdot \frac{13^2}{12^2} (x_1)^2 + 13^2 (y_1)^2 = 4 (13)^2$$

$$\boxed{x_1^2 + y_1^2 = 2^2}$$

equazione di un cerchio di raggio 2 il cui centro si trova in $C \equiv (4, 5, 0)$ del sistema x, y, z .
o nel centro $C \equiv (\sqrt{41}, 0, 0)$ nel sistema: x_1, y_1, z , o
nel centro $C \equiv \left(\frac{13}{3}\sqrt{41}, 0 \right)$ nel sistema piano $(x_1), (y_1)$.

Ripetiamo il discorso ponendo $y=0$ nell'equazione del nostro cilindro ed avremo:

$$160x^2 + 25z^2 - 72xz - 1160x + 768z + 5229 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 160 & -36 & -580 \\ -36 & 25 & 384 \\ -580 & 384 & 5229 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 5229(4000 - 1396) = 5229(2704) = 14139216 \\ -384(61440 - 20880) = -384(40560) = -15575040 \\ -580(-13824 + 14500) = -580(676) = -392080 \end{array}$$

$$\Delta = -1827904$$

$\Delta \neq 0 \rightarrow$ conica non degenera

$A_{33} > 0 \rightarrow$ caso ellittico; $a_{11}\Delta < 0$; $a_{22}\Delta < 0 \rightarrow$ ellisse reale.

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{+676}{+2704} = \boxed{x_c = +0,25}$$

$$\frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-40560}{2704} = \boxed{c = -15,00}$$

$$K_1^2 K_2^2 = 160(0,25)^2 + 25(15)^2 - 72(0,25)(15) - 5229 = \boxed{K_1^2 K_2^2 = +676}$$

L'ellisse riportata al centro, e solo ruotata, avrà per equazione:

$$160x^2 + 25z^2 - 72xz - 676 = 0$$

$$\tan(\varphi_2) = \frac{-72}{(160 - 25)} \rightarrow \boxed{\varphi_2 = 75^\circ 57' 49''}$$

$$\begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \end{array} = \frac{2 \cdot 676}{185 \pm \sqrt{(135)^2 + (72)^2}} = \begin{array}{l} \frac{1352}{185 - 153} = a^2 = 42,25 \\ \frac{1352}{185 + 153} = b^2 = 4 \end{array}$$

$$\boxed{a = 6,5} ; \boxed{b = 2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{6,5} = \frac{4}{13} = \cos \beta \rightarrow (\text{cir. circolare})$$

Ponendo $x=0$, l'equazione diventa:

$$153y^2 + 25z^2 - 96yz - 1434y + 768z + 5229 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 153 & -48 & -717 \\ -48 & 25 & 384 \\ -717 & 384 & 5229 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 5229(3825 - 2304) = 5229(1521) = 7953309 \\ -384(58752 - 34416) = -384(24336) = -9345024 \\ -717(18432 + 17925) = -717(-507) = +363519 \end{array}$$

$$\Delta = -1028196$$

$\Delta \neq 0 \rightarrow$ conica non degenera

$A_{33} > 0 \rightarrow$ caso ellittico; ($a_{11}\Delta < 0$; $a_{22}\Delta < 0$) $\rightarrow$ ellisse reale.

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-507}{1521} = \frac{-1}{3} = y_e = -0,33333$$

$$\frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-24336}{1521} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 13^2}{3^2 \cdot 13^2} = z_e = -16,00$$

$$K_{y,z} = 153 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 25(16)^2 - 96 \cdot \frac{16}{3} - 5229 = K_{y,z} = +676$$

$$\tan(2\varphi) = \frac{-96}{(153 - 25)} \rightarrow \varphi = 71^\circ 33' 54''$$

$$\begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \end{array} \begin{array}{l} \backslash \\ / \end{array} = \frac{(2)676}{178 - \sqrt{(138)^2 + (96)^2}} = \frac{1352}{178 - 160} = \begin{array}{l} 75,11 = a^2 \\ 4 = b^2 \end{array}$$

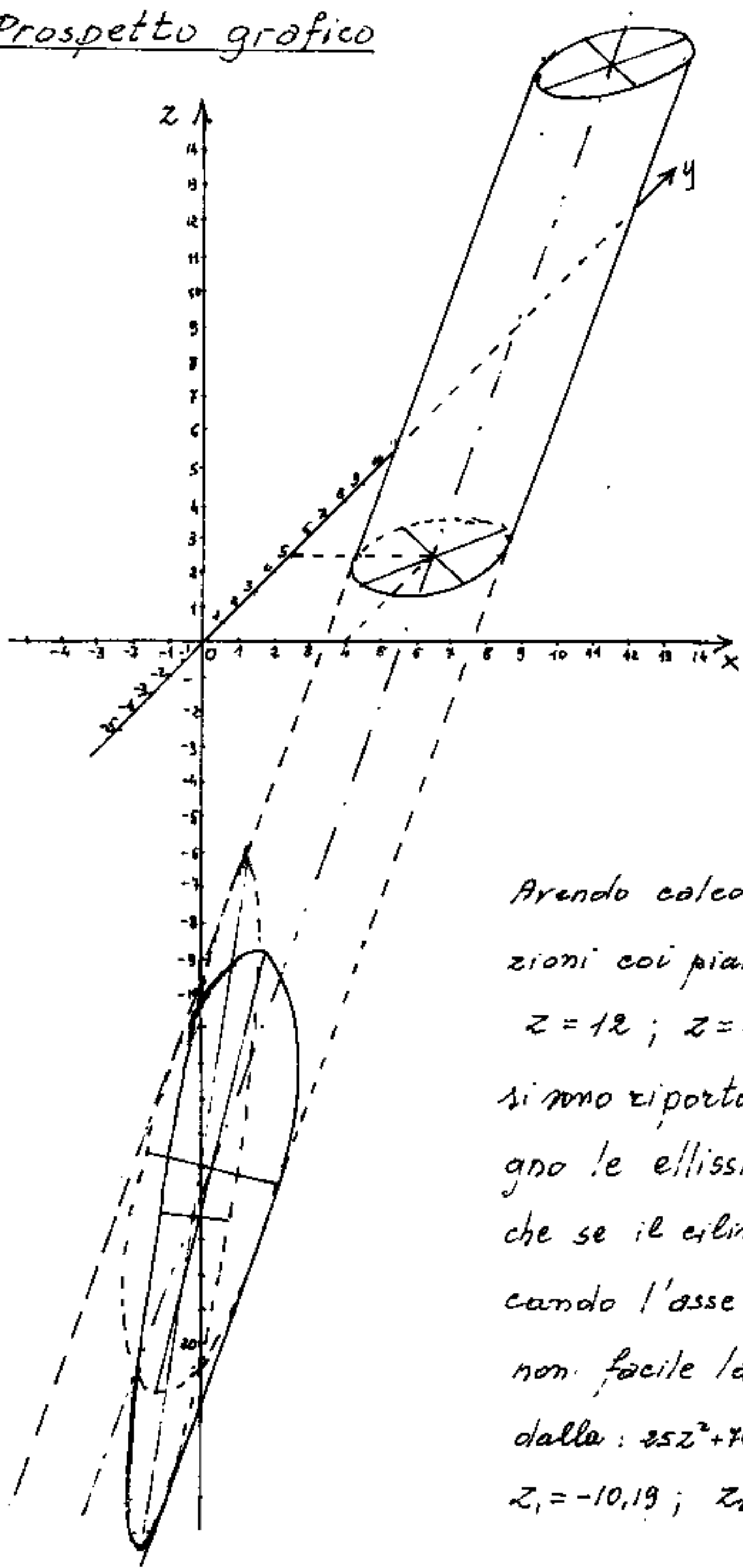
$$a = 8,666\bar{6} ; b = 2$$

L'equazione al centro dell'ellisse solo ruotata

$$e^-: 153y^2 + 25z^2 - 96yz - 676 = 0$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{8,6666} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13} = \cos d \rightarrow (\text{ser circolare})$$

Prospetto grafico



Avendo calcolato le interse
zioni coi piani:

$z = 12$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$;
si sono riportate nel disegno le ellissi relative, anche se il cilindro intersecando l'asse Z ne rende non facile la visione.

dalla : $25z^2 + 768z + 5229 = 0$

$$z_1 = -10,19 ; \quad z_2 = -20,53$$

È evidente che nel vertice il raggio è nullo.

Un cono con vertice nel centro assi, con $\varphi = 45^\circ$,
(per cui: $\tan(\varphi) = 1$), e che abbia l'asse sull'asse z ; avrà
per equazione: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; se l'angolo di
apertura " 2φ " $\neq 45^\circ$ avremo:

$$x^2 + y^2 - (z \tan \varphi)^2 = 0$$

Sono equazioni di circonferenze su piani paralleli ad
 xy , con raggio proporzionale a z , e centro sull'asse z .

Se il cono ha per asse l'asse y avremo: $x^2 - (y \tan \varphi)^2 + z^2 = 0$
(Si noti che le variabili sono tutte al quadrato, due,
con segno positivo, hanno lo stesso coefficiente; la varia-
bile, il cui asse è anche asse del cono, è con segno nega-
tivo e, salvo il caso di $45^\circ = \varphi$, ha diverso coefficiente.

Se il vertice è spostato di " s " sull'asse z = asse del cono,
la formula diventa: $x^2 + y^2 - (z+s)^2 \tan^2 \varphi = 0$ ove il vertice
 $V \equiv (0, 0, -s)$. Se facciamo una traslazione di assi in
modo che $V \equiv (x_v, y_v, z_v)$ avremo: $(x-x_v)^2 + (y-y_v)^2 - (z-z_v)^2 \tan^2 \varphi = 0$
e sviluppando i quadrati:

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \varphi - 2(x_v)x - 2(y_v)y + 2(z_v \tan^2 \varphi)z + (x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 \tan^2 \varphi) = 0$$

che può essere moltiplicata per una costante arbitraria K
e presentarsi nella forma riducibile alla: (dividendo per K)

$$x^2 + y^2 + az^2 + bx + cy + dz + e = 0$$

ove $a < 0$ altrimenti sarebbe un cilindro.

3) confronto delle due equazioni permette di dire:

"Cono circolare retto con asse parallelo all'asse z , con

apertura: $2\varphi = 2 \arctg(\sqrt{-e})$;

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2}} \quad ; \quad \boxed{y_v = -\frac{c}{2}} \quad ; \quad \boxed{z_v = \frac{d}{2(-e)}}$$

dovrà verificarsi che: $\boxed{e = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)}$

Esempio numerico

Vogliamo costruire l'equazione di un cono avente il vertice: $V = (3, 4, 6)$, con apertura: $2\varphi = 53^\circ 07' 48''$, cioè: $\tan \varphi = \left(\frac{1}{2}\right)$, sezione circolare ed asse parallelo a Z .

$$\boxed{(x-3)^2 + (y-4)^2 = (z-6)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} - 6x - 8y + 3z + 16 = 0} \quad (1) \quad \text{se } (K=8)$$

$$\boxed{8x^2 + 8y^2 - z^2 - 48x - 64y + 24z + 128 = 0}$$

Su questa equazione proponiamoci il problema inverso.

1) I coefficienti di x^2, y^2, z^2 hanno segni diversi; non è un cilindro, può essere un cono.

2) x^2 ed y^2 hanno lo stesso coefficiente $= 8$; perciò dividiamo l'intera equazione per 8, si trova la (1)

3) verifichiamo $e = +16 = \left(3^2 + 4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \left(9 + 16 - \frac{3}{4}\right) = 16$ verificato.

"è un cono con asse parallelo a Z ove $x_v = +\frac{b}{2} = 3$; $y_v = +\frac{c}{2} = 4$; $z_v = \frac{d}{2(-e)} = 6$

4) Si noti che mancano i coefficienti di xy, xz, yz . —

Cono ellittico

Se il cono anziché circolare è ellittico, ed ha l'asse coincidente con l'asse Z , i semiassi dell'ellisse saranno proporzionali a Z , e se il vertice è al centro assi avremo:

$$\boxed{\frac{x^2}{(aZ)^2} + \frac{y^2}{(bZ)^2} = 1} \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = Z^2}$$

$$\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2Z^2 = 0}$$

Se facciamo la solita traslazione:

$$b^2(x-x_v)^2 + a^2(y-y_v)^2 - a^2b^2(z-z_v)^2 = 0$$

e sviluppando i quadrati:

$$(1) \quad \boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2z^2 - 2(b^2x_v)x - 2(a^2y_v)y + 2(a^2b^2z_v)z + (b^2x_v^2 + a^2y_v^2 - a^2b^2z_v^2) = 0}$$

Equazione che può presentarsi nella forma:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0}$$

Si noti che:

$\frac{a_{11}a_{22}}{-a_{33}} = K$ perciò, dividendo per K , si deve ottenere la (1) e verificare che: $(-a_{11} \cdot a_{22}) = (a_{33})$; che: $\left(\frac{a_{14}^2}{a_{11}} + \frac{a_{24}^2}{a_{22}} - \frac{a_{34}^2}{a_{33}}\right) = a_{44}$

Può essere più vantaggioso dividere l'intera equazione per il coefficiente della variabile al quadrato che risulta col segno negativo. (può di segno positivo) con ciò eliminiamo l'eventuale " K " e l'equazione (1) si presenta:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - Z^2 - 2\left(\frac{x_v}{a^2}\right)x - 2\left(\frac{y_v}{b^2}\right)y + 2(z_v)Z + \left(\frac{x_v^2}{a^2} + \frac{y_v^2}{b^2} - z_v^2\right) = 0}$$

Esempio numerico

sia data l'equazione:

$$\boxed{18x^2 + 8y^2 - 72z^2 - 108x - 64y + 144z + 218 = 0}$$

a_{11} a_{22} a_{33} $2a_{14}$ $2a_{23}$ $2a_{34}$ a_{44}

- 1) Il polinomio ha i coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} di segno discorde $\Rightarrow$ non può essere un cilindro, può essere un cono.
- 2) mancano i coefficienti $2a_{12}, 2a_{13}, 2a_{23}$, quindi è solo traslato
- 3) Il segno negativo su z^2 indica che l'asse è parallelo a Z , ma, $a_{11} \neq a_{22}$ perciò è ellittico.
- 4) Supponendo un cono ellittico solo traslato con asse parallelo a Z , dividiamo l'equazione per $|a_{33}|$ e si ha:

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)x - 2\left(\frac{4}{9}\right)y + 2(1)z + \frac{109}{36} = 0}$$

verifichiamo: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot 9 - (1)^2 = \frac{109}{36}$ (è un cono ellittico)

perciò: $a = 2$; $b = 3$ $x_v = 3$; $y_v = 4$; $z_v = -1$

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = (z+1)^2}$$

sviluppando e torna l'equazione data con $K=2$.

In ogni cono ellittico esiste una giacitura di piani paralleli che possono sezionarlo secondo circonferenze. Tuttavia il cono ellittico differisce dal cono circolare

perché nel cono circolare l'angolo formato dalle generatrici con l'asse è costante; cioè, l'angolo di apertura al vertice 2φ è costante.

Nel cono ellittico l'angolo formato dalle generatrici con l'asse è variabile infatti: se $a \neq b$ varia da $\arctg(\frac{a}{h})$ ad $\arctg(\frac{b}{h})$, ove: "a" e "b" sono i semidiametri dell'ellisse ed "h" è l'altezza del cono.

In altre parole un cono ellittico ad asse inclinato, può sezionarsi con un piano di riferimento (per esempio con xy ad $z=0$), secondo una circonferenza, cioè non può essere interpretato come un cono circolare ad asse inclinato, perché le sezioni rette non saranno delle circonferenze, ma soprattutto non sarà costante l'angolo al vertice fra l'asse e le generatrici.

Per ora abbiamo trattato solo coni con assi normali ai piani di riferimento, vediamo ora di ricavare le formule per coni ad assi inclinati, cioè aventi per coseni direttori: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. —

Equazione generale del cono circolare

Consideriamo ora un cono che abbia per asse, una retta qualsiasi: $\frac{x-x_v}{l} = \frac{y-y_v}{m} = \frac{z-z_v}{n}$, che possiamo ridurre alla forma:

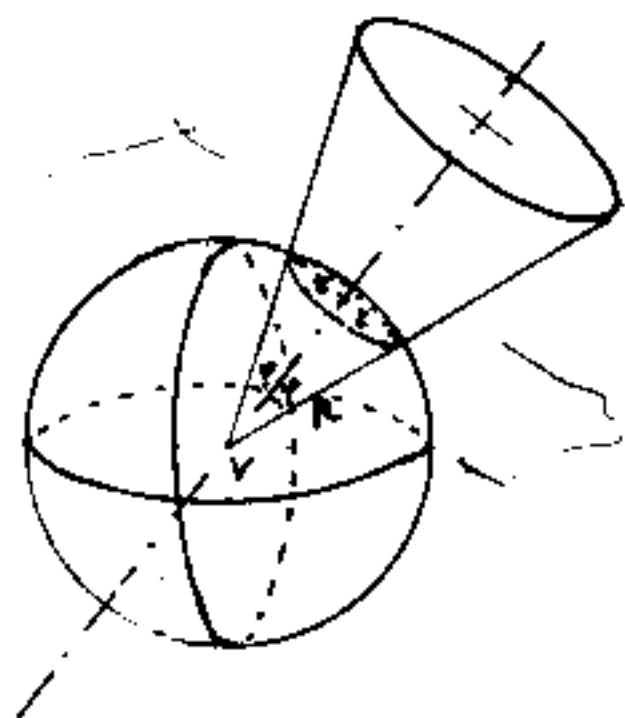
$$\frac{(x-x_v)}{\cos \alpha} = \frac{(y-y_v)}{\cos \beta} = \frac{(z-z_v)}{\cos \gamma}$$

ove:

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

Se consideriamo che il nostro cono abbia apertura: " φ " e che il vertice " V " sia il centro di una sfera di raggio " R ", avremo che l'equazione della sfera sarà:

$$(x-x_v)^2 + (y-y_v)^2 + (z-z_v)^2 = R^2$$



mentre il cerchio intersezione fra tale sfera ed il nostro cono avrà per raggio:

$$r = R \sin \varphi$$

questo cerchio giacerà su un piano perpendicolare all'asse del cono, e sarà spostato rispetto a " V " di:

di: $R \cos \varphi$; cioè avrà per equazione:

$$\cos \alpha (x-x_v) + \cos \beta (y-y_v) + \cos \gamma (z-z_v) - R \cos \varphi = 0$$

Ma il luogo geometrico delle intersezioni di questo piano e la sfera di raggio variabile R , è l'insieme dei cerchi sezioni rette del nostro cono, le cui circonferenze sono la superficie conica.

Quindi se eliminiamo R fra le due equazioni abbiamo l'equazione del cono:

$$(x-x_v)^2 + (y-y_v)^2 + (z-z_v)^2 = \left[\cos\alpha(x-x_v) + \cos\beta(y-y_v) + \cos\gamma(z-z_v) \right]^2 / \cos^2\varphi$$

Quindi: L'equazione di un qualsiasi cono circolare retto, comunque disposto rispetto agli assi, è data dall'equazione di una sfera di centro V che abbia per raggio l'equazione del piano per V , normale all'asse, diviso per il coseno del semiangolo di apertura del cono. Poiché nell'equazione della sfera, il raggio figura elevato a quadrato, anche l'equazione del piano e $\cos\varphi$ saranno a quadrato.

Si noti che l'equazione è generale, comprende l'equazione del cilindro circolare retto, basta porre: $\varphi=0$.
sviluppiamolo:

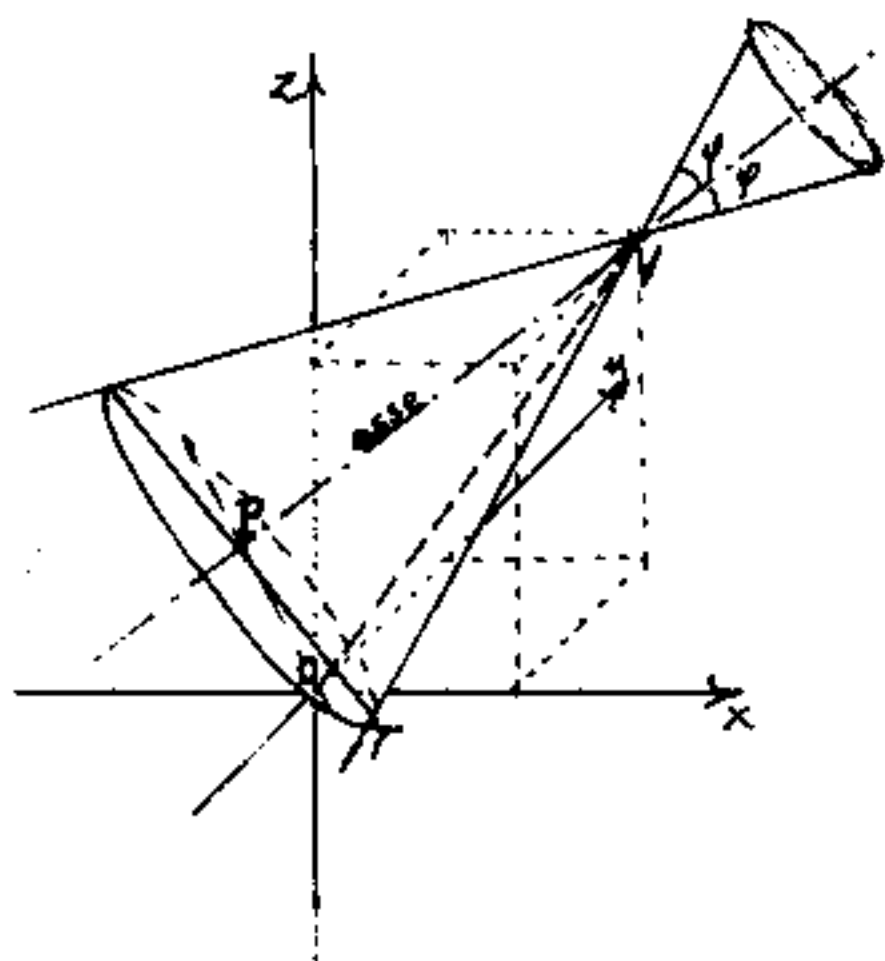
$$\begin{aligned} \cos^2\varphi [(x-x_v)^2 + (y-y_v)^2 + (z-z_v)^2] &= [\cos^2\alpha(x-x_v)^2 + \cos^2\beta(y-y_v)^2 + \cos^2\gamma(z-z_v)^2 \\ &\quad + 2\cos\alpha\cos\beta(x-x_v)(y-y_v) + 2\cos\alpha\cos\gamma(x-x_v)(z-z_v) + 2\cos\beta\cos\gamma(y-y_v)(z-z_v)] \\ [(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha)(x-x_v)^2 + (\cos^2\varphi - \cos^2\beta)(y-y_v)^2 + (\cos^2\varphi - \cos^2\gamma)(z-z_v)^2] &= \\ = [2\cos\alpha\cos\beta \cdot xy - 2\cos\alpha\cos\beta y_v x - 2\cos\alpha\cos\beta x_v y + 2\cos\alpha\cos\beta x_v y_v + \\ &\quad + 2\cos\alpha\cos\gamma xz - 2\cos\alpha\cos\gamma z_v x - 2\cos\alpha\cos\gamma x_v z + 2\cos\alpha\cos\gamma x_v z_v + \\ &\quad + 2\cos\beta\cos\gamma yz - 2\cos\beta\cos\gamma z_v y - 2\cos\beta\cos\gamma y_v z + 2\cos\beta\cos\gamma y_v z_v] = \\ = [2\cos\alpha\cos\beta xy + 2\cos\alpha\cos\gamma xz + 2\cos\beta\cos\gamma yz - 2\cos\alpha(\cos\beta y_v + \cos\gamma z_v)x - 2\cos\beta(\cos\alpha x_v + \cos\gamma z_v)y - 2\cos\gamma(\cos\alpha x_v + \cos\beta y_v)z + 2(\cos\alpha x_v \cos\beta y_v + \cos\alpha x_v \cos\gamma z_v + \cos\beta y_v \cos\gamma z_v)] \end{aligned}$$

Sviluppando i quadrati al primo membro dell'uguaglianza si ha:

$$[(\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha)(x^2 - 2x_v x + x_v^2) + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \beta)(y^2 + 2y_v y + y_v^2) + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma)(z^2 + 2z_v z + z_v^2)] =$$

Se portiamo al primo membro anche i termini del secondo membro e li raggruppiamo in ordine di grado, in modo da rendere più compatta la formula si ha:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) x^2 + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \beta) y^2 + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma) z^2 \right\} - 2 \left\{ (\cos \alpha \cos \beta) xy + (\cos \alpha \cos \gamma) xz + (\cos \beta \cos \gamma) yz \right\} + 2 \left\{ [\cos \alpha (\cos \alpha x_v + \cos \beta y_v + \cos \gamma z_v) - \cos \varphi x_v] x + \right. \\ & \left. + [\cos \beta (\cos \alpha x_v + \cos \beta y_v + \cos \gamma z_v) - \cos \varphi y_v] y + [\cos \gamma (\cos \alpha x_v + \cos \beta y_v + \cos \gamma z_v) - \cos \varphi z_v] z \right\} - \\ & - \left\{ \cos^2 \alpha x_v^2 + \cos^2 \beta y_v^2 + \cos^2 \gamma z_v^2 + 2(\cos \alpha \cos \beta x_v y_v + \cos \alpha \cos \gamma x_v z_v + \cos \beta \cos \gamma y_v z_v) - \cos^2 \varphi (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \right\} = 0 \end{aligned}$$



Occorre evidenziare e distinguere l'asse PV del cono dalla retta OV , dove P è l'intersezione dell'asse col piano π ad essa normale, e passante per l'origine "O" degli assi. Abbiamo:

$$\overline{OV}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PV}^2$$

$$(\cos \alpha) x_p + (\cos \beta) y_p + (\cos \gamma) z_p = 0$$

$$\overline{PO}^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2$$

La formula potrebbe essere resa più concisa se sostituiamo: $[\cos \alpha (\cos \alpha x_v + \cos \beta y_v + \cos \gamma z_v) - \cos^2 \varphi x_v] = [\cos \alpha (\overline{PV}) - \cos^2 \varphi x_v] =$
 $= [(x_v - x_p) - \cos^2 \varphi x_v] = [x_v \sin^2 \varphi - x_p]$; analogamente
 le altre: $[x_v^2 + y_v^2 + z_v^2] = \overline{OV}^2$

$$[\cos^2 \alpha x_v^2 + \cos^2 \beta y_v^2 + \cos^2 \gamma z_v^2 + 2(\cos \alpha \cos \beta x_v y_v + \cos \alpha \cos \gamma x_v z_v + \cos \beta \cos \gamma y_v z_v)] =$$

$$(\cos \alpha x_v + \cos \beta y_v + \cos \gamma z_v)^2 = \overline{PV}^2$$

essa diventerebbe:

$$[(\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) x^2 + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \beta) y^2 + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma) z^2 - 2 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \cos \beta \cdot xy + \\ \cos \alpha \cos \gamma \cdot xz + \\ \cos \beta \cos \gamma \cdot yz \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{l} (x_v \sin^2 \varphi - x_p) x + \\ (y_v \sin^2 \varphi - y_p) y + \\ (z_v \sin^2 \varphi - z_p) z \end{array} \right\} +$$

$$+ (-\overline{PV}^2 + \overline{OV}^2 \cos^2 \varphi) = 0]$$

Dalla quale è possibile notare che se una generatrice del cono passa per O, cioè se coincide $\overline{OV}$ o $\overline{TV}$, il termine noto si annulla: $(\overline{OV}^2 \cos^2 \varphi - \overline{PV}^2) = 0$.

In generale una equazione di una superficie conica, (il cilindro è da considerare un cono con vertice all'infinito) sarà del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Se: $a_{44} = 0$ il cono passa per l'origine con una generatrice.

$$\text{e a: } \boxed{\overline{OV} \cos \varphi = \overline{PV}}$$

Se: $2a_{12} = 0$; $a_{13} = 0$; $a_{23} = 0$; $a_{11} = a_{22}$; $\frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{a_{44}}{a_{22}} < 0$, il cono ha l'asse parallelo all'asse Z.

facciamo una analisi del significato dei coefficienti:
(considerandoli già divisi per l'eventuale K arbitrario).

$$\left. \begin{aligned} a_{11}/K &= (\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) \\ a_{22}/K &= (\cos^2 \varphi - \cos^2 \beta) = (\sin^2 \beta - \sin^2 \varphi) \\ a_{33}/K &= (\cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma) = (\sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \right\} \boxed{\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{K} = (3 \cos^2 \varphi - 1)}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{12}/K &= (-\cos \alpha \cos \beta) \\ a_{13}/K &= (-\cos \alpha \cos \gamma) \\ a_{23}/K &= (-\cos \beta \cos \gamma) \end{aligned} \right\} \boxed{-K = \left(\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} \right)}$$

$$a_{14} = -(a_{11}x_v + a_{12}y_v + a_{13}z_v)$$

$$a_{24} = -(a_{12}x_v + a_{22}y_v + a_{23}z_v)$$

$$a_{34} = -(a_{13}x_v + a_{23}y_v + a_{33}z_v)$$

$$a_{44} = (a_{11}x_v^2 + a_{22}y_v^2 + a_{33}z_v^2 + 2a_{12}x_vy_v + 2a_{13}x_vz_v + 2a_{23}y_vz_v)$$

Confrontando con i coefficienti trovati per l'equazione del cilindro si nota che sono identici se poniamo: $\varphi=0$, cioè: $\cos \varphi = 1$. Abbiamo quindi una incognita in più, ed è l'apertura angolare "2 φ " del cono. Si nota che $\cos^2 \varphi$ figura solo nei primi tre coefficienti che, sommandoli:

$(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = K(3 \cos^2 \varphi - 1)$; si elide: $\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma$ e restano due incognite: " K " e " $\cos^2 \varphi$ ". " K " è possibile calcolarla con la seconda terna di coefficienti; infatti

$$\frac{a_{12} \cdot a_{13}}{a_{23}} = \frac{+K(\cos \alpha \cos \beta) \cdot K(\cos \alpha \cos \gamma)}{-K(\cos \beta \cos \gamma)} = -K \cos^2 \alpha$$

$$\frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = -K \cos^2 \beta; \quad \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = -K \cos^2 \gamma \quad \text{e sommando:}$$

$$\left(\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} \right) = -K (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = -K$$

questa espressione può derivarsi:

$$K = - \frac{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}{a_{12} a_{13} a_{23}}$$

dalla: $\cos^2 \varphi = \frac{1}{3} \left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{K} + 1 \right)$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(a_{12} a_{13} a_{23}) (a_{11} + a_{22} + a_{33})}{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2} \right)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{a_{12} a_{13}}{-K a_{23}} = \frac{a_{12} a_{13} (a_{12} a_{13} a_{23})}{a_{23} (a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2)} = + \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{12}} \right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{13}} \right)^2}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{a_{12} a_{23}}{-K a_{13}} = \frac{a_{12} a_{23} (a_{12} a_{13} a_{23})}{a_{13} (a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2)} = + \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{13}}{a_{23}} \right)^2 + \left(\frac{a_{13}}{a_{12}} \right)^2}$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{a_{13} a_{23}}{-K a_{12}} = \frac{a_{13} a_{23} (a_{12} a_{13} a_{23})}{a_{12} (a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2)} = + \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{12}}{a_{23}} \right)^2 + \left(\frac{a_{12}}{a_{13}} \right)^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + a_{13}^2 \left(\frac{1}{a_{12}^2} + \frac{1}{a_{23}^2} \right)} ; \cos^2 \beta = \frac{1}{1 + a_{13}^2 \left(\frac{1}{a_{23}^2} + \frac{1}{a_{12}^2} \right)} ; \cos^2 \gamma = \frac{1}{1 + a_{12}^2 \left(\frac{1}{a_{23}^2} + \frac{1}{a_{13}^2} \right)}$$

o anche:

$$\cos \alpha = \frac{a_{12} a_{13}}{\sqrt{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}} ; \cos \beta = \frac{a_{12} a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}} ; \cos \gamma = \frac{a_{13} a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}}$$

Si noti che la terza terza di coefficienti è funzione delle coordinate di "V" (vertice del cono) e dei coefficienti delle due terze precedenti.

Nell'equazione del cilindro, abbiamo visto, che il determinante dei coefficienti delle coordinate era nullo.

cioè che le tre equazioni non erano indipendenti, infatti esse davano le coordinate di un punto dell'asse del cilindro che noi potremmo definire attribuendo un valore arbitrario ad una coordinata. Ciò rappresentava il punto di intersezione dell'asse col piano rappresentato dalla coordinata scelta da noi.

Ora il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_v + a_{12}y_v + a_{13}z_v = -a_{14} \\ a_{12}x_v + a_{22}y_v + a_{23}z_v = -a_{24} \\ a_{13}x_v + a_{23}y_v + a_{33}z_v = -a_{34} \end{cases}$$

Potrà fornirci le coordinate del vertice se il sistema è possibile; ma, per valori arbitrari, il sistema può essere indeterminato, e si ha il cilindro; ma può essere anche impossibile, ed in questo caso esamineremo cosa esprime il polinomio.

In certi casi, per risolvere le coordinate di "v" può convenire di considerare la formula nella sua forma più concisa, nella quale il sistema:

$$\begin{cases} a_{14}/k = x_v \sin^2 \varphi - x_p \\ a_{24}/k = y_v \sin^2 \varphi - y_p \\ a_{34}/k = z_v \sin^2 \varphi - z_p \end{cases} \quad (\text{vedi formula nella forma concisa})$$

moltiplicando la I equazione per $\cos \alpha$, la seconda per $\cos \beta$, la terza per $\cos \gamma$, e sommando le tre equazioni avremo:

$$\frac{1}{K} (a_{14} \cos \alpha + a_{24} \cos \beta + a_{34} \cos \gamma) = [(x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma) \cos \varphi - (x_p \cos \alpha + y_p \cos \beta + z_p \cos \gamma)]$$

ma: "P" giace su un piano passante per l'origine degli assi

per cui: $\cos \alpha \cdot x_p + \cos \beta \cdot y_p + \cos \gamma \cdot z_p = 0$, mentre:

$\cos \alpha \cdot x_v + \cos \beta \cdot y_v + \cos \gamma \cdot z_v = \overline{PV}$ per cui:

$$\overline{PV} = \frac{a_{14} \cos \alpha + a_{24} \cos \beta + a_{34} \cos \gamma}{K \sin^2 \varphi}$$

e dall'ultimo coefficiente in forma concisa:

$$a_{44} = (\overline{OV}^2 \cos^2 \varphi - \overline{PV}^2) K$$

ricaviamo:

$$\overline{OV} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{a_{44}}{K} + \overline{PV}^2}$$

ma il terzo gruppo di coefficienti può essere ri-guardato:

$$\begin{cases} a_{14} = (\overline{PV} \cos \alpha - (\cos^2 \varphi) x_v) K \\ a_{24} = (\overline{PV} \cos \beta - (\cos^2 \varphi) y_v) K \\ a_{34} = (\overline{PV} \cos \gamma - (\cos^2 \varphi) z_v) K \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

$$x_v = \frac{\overline{PV} \cos \alpha - a_{14}/K}{\cos^2 \varphi}$$

$$y_v = \frac{\overline{PV} \cos \beta - a_{24}/K}{\cos^2 \varphi}$$

$$z_v = \frac{\overline{PV} \cos \gamma - a_{34}/K}{\cos^2 \varphi}$$

possiamo verificare che:

$$x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \overline{OV}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PV}^2$$

Il terzo gruppo di coefficienti nella forma precedente:

$$\begin{cases} x_p = -x_v \sin^2 \varphi + a_{14}/K \\ y_p = -y_v \sin^2 \varphi + a_{24}/K \\ z_p = -z_v \sin^2 \varphi + a_{34}/K \end{cases}$$

permette di verificare che

$$\cos \alpha x_p + \cos \beta y_p + \cos \gamma z_p = 0 \quad ; \quad (\text{già giustificata})$$

$$\text{e che: } (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) = \overline{OP}^2.$$

Vi è infine da osservare che i coefficienti della equazione sono dieci, mentre il significato di tali coefficienti è in funzione di: $(K, \varphi, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, x_v, y_v, z_v)$ cioè otto grandezze, di cui solo sette indipendenti essendo: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Per sette incognite bastano sette equazioni, quindi almeno tre equazioni debbono essere combinazione lineare delle restanti.

Esempio numerico - studiare l'equazione di un cono che abbia il vertice $V \equiv (3, 4, 5)$, che abbia l'asse diretto dai coseni direttori:

$$\cos \alpha = 0,6 \quad ; \quad \cos \beta = 0,7 \quad ; \quad \sqrt{1 - (\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{0,15}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{0,15} \quad ; \quad \text{ed abbia apertura: } 2\varphi = 2(26^\circ 39' 54'')$$

$$\text{cioè: } \cos^2 \varphi = 0,80. \quad (\sin^2 \varphi = 0,2)$$

Dall'analisi dei coefficienti dell'equazione del cono abbiamo:

$$\frac{a_{11}}{K} = (\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) = (0,80 - 0,36) \Rightarrow a_{11} = (0,44)K$$

$$\frac{a_{22}}{K} = (\cos^2 \varphi - \cos^2 \beta) = (0,80 - 0,49) \Rightarrow a_{22} = (0,31)K$$

$$\frac{a_{33}}{K} = (\cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma) = (0,80 - 0,15) \Rightarrow a_{33} = (0,65)K$$

In queste tre equazioni figurano come incognite indipendenti:

$\alpha, \beta, K, \varphi$; cioè 4 valori. (manca una correlazione indipendente). Sommando le tre correlazioni si ha una nuova correlazione (combinazione lineare); (non indipendente)

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = K(3\cos^2 \varphi - 1) = (1,4)K$$

$$2(a_{12}) = 2K(-\cos \alpha \cos \beta) = -2K(0,6)(0,7) = -2K(0,42) = -K(0,84)$$

$$2(a_{13}) = 2K(-\cos \alpha \cos \gamma) = -2K(0,6)(\sqrt{0,15}) = -2K(0,232379) = -K(0,464758)$$

$$2(a_{23}) = 2K(-\cos \beta \cos \gamma) = -2K(0,7)(\sqrt{0,15}) = -2K(0,271108834) = -K(0,542217668)$$

In questa seconda terna di valori notiamo che:

$$\frac{a_{12} \cdot a_{13}}{a_{23}} = \frac{-K(\cos\alpha \cos\beta)(\cos\alpha \cos\gamma)K}{K(\cos\beta \cos\gamma)} = -K \cos^2\alpha$$

$$\frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = \frac{-K(\cos\alpha \cos\beta)(\cos\beta \cos\gamma)K}{K(\cos\alpha \cos\gamma)} = -K \cos^2\beta$$

$$\frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = \frac{-K(\cos\alpha \cos\gamma)(\cos\beta \cos\gamma)K}{K(\cos\alpha \cos\beta)} = -K \cos^2\gamma$$

sommando e ricordando che: $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1$

si ha:

$$\boxed{\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = -K}$$

cioè da questa seconda terna è possibile calcolare

K ed i coseni direttori. (Nell'equazione è bene tenere in evidenza il due: $2(a_{12})$; $2(a_{13})$; $2(a_{23})$).

Teorati: K , $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ è possibile con la prima terna di coefficienti calcolare φ con tre equazioni diverse, cioè verificare che la correlazione esistente per $\varphi \neq 0$ è quella di un cono.

Più delicata è la terza terna di coefficienti che, come abbiamo visto, può rappresentarsi con modalità diverse, sempre in funzione delle coordinate del vertice: $V = (3, 4, 5)$; Verifichiamo numericamente:

$$2(a_{14}) = 2K[\cos\alpha(\cos\alpha x_v + \cos\beta y_v + \cos\gamma z_v) - \cos^2\varphi x_v] = 2K[0,6(4,8 + 2,8 + \sqrt{19}) - 3,4] = 2K(1,521895)$$

$$2(a_{24}) = 2K[\cos\beta(\cos\alpha x_v + \cos\beta y_v + \cos\gamma z_v) - \cos^2\varphi y_v] = 2K[0,7(6,53) - 3,2] = 2K(1,37654171)$$

$$2(a_{34}) = 2K[\cos\gamma(\cos\alpha x_v + \cos\beta y_v + \cos\gamma z_v) - \cos^2\varphi z_v] = 2K[\sqrt{15}(6,53) - 4,0] = 2K(-1,46842166)$$

Oppure:

$$2a_{14} = -2(a_{11}x_v + a_{12}y_v + a_{13}z_v) = -2K[-(0,4)3 + (0,42)4 + (0,232379)5] = 2K(1,521895)$$

$$2a_{24} = -2(a_{12}x_v + a_{22}y_v + a_{23}z_v) = -2K[(0,42)3 - (0,31)4 + (0,271108834)5] = 2K(1,375544171)$$

$$2a_{34} = -2(a_{13}x_v + a_{23}y_v + a_{33}z_v) = -2K[(0,232379)3 + (0,271108834)4 - (0,65)5] = 2K(-1,468427661)$$

calcoliamo ora:

$$\overline{OV} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} ; \quad \overline{OV} = \sqrt{50} ; \quad \boxed{\overline{OV} = 7,071067812}$$

$$\frac{(x_v - x_p)}{\overline{PV}} = \cos \alpha \rightarrow (x_v - x_p) \cos^2 \alpha = (\cos^2 \alpha) \overline{PV} \text{ analogamente:}$$

$$(y_v - y_p) \cos^2 \beta = (\cos^2 \beta) \overline{PV} ; (z_v - z_p) \cos^2 \gamma = (\cos^2 \gamma) \overline{PV} ;$$

sommando membro a membro e ricordando che:

$$(\cos \alpha) x_p + (\cos \beta) y_p + (\cos \gamma) z_p = 0 \quad (\text{piano di } P \text{ passante per } O)$$

$$\boxed{\overline{PV}} = x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma = (3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,15) = \boxed{6,536491673}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OV}^2 - \overline{PV}^2} = \sqrt{50 - 42,72572339} = \sqrt{7,27427661} = \text{cioè:}$$

$$\boxed{\overline{OP} = 2,697086689} ; x_p = x_v - \overline{OV} \cos \alpha ; y_p = y_v - \overline{OV} \cos \beta ; z_p = z_v - \overline{OV} \cos \gamma.$$

$$\boxed{x_p} = x_v \sec^2 \varphi - a_{14}/K = (3(0,2) - 1,521895) = \boxed{-0,921895}$$

$$\boxed{y_p} = y_v \sec^2 \varphi - a_{24}/K = (4(0,2) - 1,375544171) = \boxed{-0,575544171}$$

$$\boxed{z_p} = z_v \sec^2 \varphi - a_{34}/4 = (5(0,2) + 1,468427661) = \boxed{+2,468427661}$$

$$\text{da cui risulta: } \boxed{\overline{OP}^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

$$\cos(\widehat{xOP}) = x_p / \overline{OP} = -0,921895 / 2,697086689 = -0,341811409$$

$$\cos(\widehat{yOP}) = y_p / \overline{OP} = -0,575544171 / 2,697086689 = -0,213394762$$

$$\cos(\widehat{zOP}) = z_p / \overline{OP} = +2,468427661 / 2,697086689 = +0,915219993$$

$$\widehat{xOP} = 109^\circ 59' 14''$$

$$\widehat{yOP} = 102^\circ 19' 17''$$

$$\widehat{zOP} = 23^\circ 45' 47''$$

$$\cos^2(\widehat{xOP}) = 0,116835039$$

$$\cos^2(\widehat{yOP}) = 0,045537324$$

$$\cos^2(\widehat{zOP}) = 0,837627636$$

} = 1

calcoliamo ora il termine noto:

$$a_{44} = \left(x_v^2 a_{11} + y_v^2 a_{22} + z_v^2 a_{33} + 2a_{12}x_v y_v + 2a_{13}x_v z_v + 2a_{23}y_v z_v \right)$$

$$a_{44} = \left[9 \cdot (0,44) + 16 \cdot (0,31) + 25 \cdot (0,65) - (0,84)12 - (0,464758)15 - (0,542217668)20 \right]$$

$$a_{44} = -2,72572336$$

Perciò l'equazione rappresentativa del cono sarà:

$$\left[\underset{a_{11}}{(0,44)}x^2 + \underset{a_{22}}{(0,31)}y^2 + \underset{a_{33}}{(0,65)}z^2 - 2\underset{a_{12}}{(0,42)}xy - 2\underset{a_{13}}{(0,232379)}xz - 2\underset{a_{23}}{(0,271108834)}yz + \right. \\ \left. + 2\underset{a_{14}}{(1,521895)}x + 2\underset{a_{24}}{(1,375544171)}y + 2\underset{a_{34}}{(-1,468427661)}z - (2,72572336) = 0 \right]$$

Equazione che potrebbe essere moltiplicata per un K arbitrario,

Problema inverso: data l'equazione ora scritta trovare le caratteristiche del solido che rappresenta.

Supponiamo sia un cono; perciò dalla secondaterna di coefficienti abbiamo:

$$\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} = -K \cos^2 \alpha = \frac{(0,42)(0,232379)}{-(0,271108834)} = -0,36$$

$$\frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = -K \cos^2 \beta = \frac{(0,42)(0,271108834)}{-(0,232379)} = -0,49$$

$$\frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = -K \cos^2 \gamma = \frac{(0,232379)(0,271108834)}{-0,42} = -0,15$$

$$\text{Sommando: } -K = -1 \quad ; \quad (K = +1)$$

$$(K=1)$$

$$\cos^2 \alpha = +0,36 \quad ; \quad \cos \alpha = 0,6 \quad ; \quad \alpha = 53^\circ 07' 48''$$

$$\cos^2 \beta = +0,49 \quad ; \quad \cos \beta = 0,7 \quad ; \quad \beta = 45^\circ 34' 23''$$

$$\cos^2 \gamma = +0,15 \quad ; \quad \cos \gamma = \sqrt{0,15} \quad ; \quad \gamma = 67^\circ 12' 48''$$

Sommando ora i primi tre coefficienti si ha:

$$\left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{K} \right) = (3 \cos^2 \varphi - 1) K \rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{(0,44 + 0,31 + 0,65) + 1}{3} = 0,80$$

$$\underline{\cos^2 \varphi = 0,80} \quad ; \quad \underline{\cos \varphi = 0,894427191} \quad ; \quad \underline{\varphi = 26^\circ 33' 54''}$$

verifichiamo:

$$K(\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) = a_{11} = (0,80 - 0,36) = (0,44)$$

$$K(\cos^2 \varphi - \cos^2 \beta) = a_{22} = (0,80 - 0,49) = (0,31)$$

$$K(\cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma) = a_{33} = (0,80 - 0,15) = (0,65)$$

Cio' conferma l'ipotesi che sia un cono, ma abbiamo ancora una verifica.

Calcoliamo le coordinate di "V" dalla terza di coefficienti:

$$x_V = \left(\overline{PV} \cos \alpha - a_{14}/K \right) \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \left[6,536491673(0,6) - 1,521895 \right] \frac{1}{0,8} = 3$$

$$y_V = \left(\overline{PV} \cos \beta - a_{24}/K \right) \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \left[6,536491673(0,7) - 1,37554171 \right] \frac{1}{0,8} = 4$$

$$z_V = \left(\overline{PV} \cos \gamma - a_{34}/K \right) \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \left[6,536491673(\sqrt{0,15}) + 1,468437661 \right] \frac{1}{0,8} = 5$$

Vogliamo verificare applicando i determinanti alla equazione nella forma estesa.

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= 1,521895 \\ a_{24} &= 1,375544171 \\ a_{34} &= 1,468427661 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= -(a_{11}x_v + a_{12}y_v + a_{13}z_v) \\ &= -(a_{12}x_v + a_{22}y_v + a_{23}z_v) \\ &= -(a_{13}x_v + a_{23}y_v + a_{33}z_v) \end{aligned}$$

cerchiamo la risoluzione col determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,44 & -0,42 & -0,232379 \\ -0,42 & 0,31 & -0,271108884 \\ -0,232379 & -0,271108884 & 0,65 \end{vmatrix} \begin{aligned} &0,65(-0,04) \\ &+0,271108884(-0,21689) \\ &-0,232379(0,185903221) \end{aligned} = \begin{aligned} &-0,036 \\ &-0,0588 \\ &+0,0432 \end{aligned}$$

$$\Delta = -0,128$$

$$\begin{vmatrix} -1,521895 & -0,42 & -0,232379 \\ -1,375544171 & 0,31 & -0,271108884 \\ +1,468427661 & -0,271108884 & 0,65 \end{vmatrix} \begin{aligned} &0,65(-1,043516) \\ &+0,271108884(0,09295) \\ &+1,468427661(0,1859) \end{aligned} = \begin{aligned} &-0,6821854 \\ &+0,025200 \\ &+0,27299 \end{aligned}$$

$$\Delta_x = -0,384$$

$$\boxed{x_v = \frac{-0,384}{-0,128} = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 0,44 & -1,521895 & -0,232379 \\ -0,42 & -1,375544171 & -0,271108884 \\ 0,232379 & +1,468427661 & 0,65 \end{vmatrix} \begin{aligned} &0,65(-1,2444353) \\ &-1,468427661(-0,216891) \\ &-0,232379(0,0929517) \end{aligned} = \begin{aligned} &-0,808883 \\ &+0,3184830 \\ &-0,0216 \end{aligned}$$

$$\Delta_y = -0,512$$

$$\boxed{y_v = \frac{-0,512}{-0,128} = 4}$$

$$\begin{vmatrix} 0,44 & -0,42 & -1,521895 \\ -0,42 & 0,31 & -1,375544171 \\ -0,232379 & -0,271108884 & +1,468427661 \end{vmatrix} \begin{aligned} &1,468427661(-0,04) \\ &+0,271108884(1,24435) \\ &-0,232379(1,043516) \end{aligned} = \begin{aligned} &-0,058737 \\ &-0,3373775 \\ &-0,2438855 \end{aligned}$$

$$\Delta_z = -0,640$$

$$\boxed{z_v = \frac{-0,640}{-0,128} = 5}$$

Verifichiamo ora il termine noto a_{44} , che non è stato usato

$$a_{44} = [a_{11}x_v^2 + a_{22}y_v^2 + a_{33}z_v^2 + 2a_{12}x_v y_v + 2a_{13}x_v z_v + 2a_{23}y_v z_v]$$

$$a_{44} = [(0,44)3^2 + (0,31)4^2 + (0,65)5^2 - 2(0,42)3 \cdot 4 - 2(0,232379)3 \cdot 5 - 2(0,271108834)4 \cdot 5]$$

$$a_{44} = [3,96 + 4,96 + 16,25 - 10,08 - 6,97137 - 10,84435336]$$

$a_{44} = -2,72572336$ conferma che il solido è un cono con vertice in $V \equiv (3, 4, 5)$, con apertura $2\varphi = 2(26^\circ 33' 54'') = 53^\circ 07' 48''$, ed avente per asse la retta:

$$\boxed{\frac{x-3}{0,6} = \frac{y-4}{0,7} = \frac{z-5}{\sqrt{0,15}}}$$

Questa retta incontra per $z=0$ il piano xy nel punto:

$$x_1 = \frac{-\frac{3}{\sqrt{0,15}}}{0,6} + 3 = -4,745966693 \quad ; \quad y_1 = \frac{-\frac{3,5}{\sqrt{0,15}}}{0,7} + 4 = -5,036961142$$

per $y=0$ incontra il piano xz nel punto:

$$x_2 = \frac{-\frac{2,4}{0,7}}{0,6} + 3 = -0,428571429 \quad ; \quad z_2 = \frac{-\frac{4 \cdot \sqrt{0,15}}{0,7}}{0,6} + 5 = 2,786866660$$

per $x=0$ incontra il piano yz nel punto:

$$y_3 = \frac{-\frac{2,1}{0,6}}{0,7} + 4 = 0,5 \quad ; \quad z_3 = \frac{-\frac{3\sqrt{0,15}}{0,6}}{0,7} + 5 = 3,063508327$$

Cerchiamo ora l'intersezione del cono con i piani xy , xz , yz .

Intersezione del cono col piano xy. ($z=0$)

l'equazione diventa:

$$\boxed{\underbrace{(0,44)}_{a_{11}}x^2 + \underbrace{(0,31)}_{a_{22}}y^2 - \underbrace{2(0,42)}_{2a_{12}}xy + \underbrace{2(1,521895)}_{2a_{13}}x + \underbrace{2(1,375544171)}_{2a_{23}}y - \underbrace{(2,72572336)}_{a_{33}} = 0}$$

Il determinante delle coniche: ($A = a_{33}A_{33} - a_{23}A_{23} + a_{13}A_{13}$)

$$\begin{vmatrix} 0,44 & -0,42 & +1,521895 \\ -0,42 & +0,31 & +1,375544171 \\ 1,521895 & +1,375544171 & -2,72572336 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2,72572336(-0,04) = +0,109028934 \\ -1,375544171(1,244435335) = -1,711775771 \\ +1,521895(-1,049516003) = -1,597253163 \end{cases}$$

$$A = -3,2000000$$

$A \neq 0 \rightarrow$ (conica non degenera)

$A_{33} = (-0,04) < 0 \rightarrow$ (caso iperbolico) (ad assi ruotati e traslati)
 $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$

Coordinate del centro traslato "c":

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-1,049516003}{-0,04} =$$

$$x_c = +26,23790$$

$$y_c = \frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-1,244435335}{-0,04} =$$

$$y_c = +31,110883$$

Angolo di rotazione degli assi "di"

$$\text{tang.}(2d_i) = \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{-2(0,42)}{(0,44 - 0,31)} = \frac{-0,84}{0,13} = \text{tang.}(2d_i) = -6,46153846$$

$$\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{-0,84}{0,13}\right) = \boxed{\alpha_i = 49^\circ 23' 55,34''}$$

occorre ricordare che per trasformare la tangente in co

seno, il radicale deve essere assunto col segno della tangente

$$\cos(2\alpha_i) = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2(2\alpha_i)}} = \frac{13}{-\sqrt{13^2 + 84^2}} = \boxed{\frac{-13}{85} = \cos(2\alpha_i)}$$

$$\cos(\alpha_i) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha_i)}{2}} = \sqrt{\frac{85 - 13}{2 \cdot 85}} = \sqrt{\frac{72}{2 \cdot 85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_i) = 6/\sqrt{85}}$$

$$\text{sen}(\alpha_i) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha_i)} = \sqrt{\frac{85 - 36}{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

$$\boxed{\text{sen } \alpha_i = 7/\sqrt{85}}$$

$$\boxed{\text{tg } \alpha_i = 7/6}$$

calcoliamo i semiassi "a" e "b" dell'iperbole.

abbiamo ampiamente trattato (vd II) i vari casi dell'iperbole coniugata, ed abbiamo evidenziato che, mentre nell'ellisse si assumeva come asse focale il maggiore fra s_1 ed s_2 , nell'iperbole ciò non vale, perché i fuochi possono essere sia sui semiassi maggiori, sia sui semiassi minori e le due iperboli si dicono coniugate.

$$K = \left(-\frac{A_{33}}{A} \right) = \frac{(-0,04)^2}{-(3,2)} = -\left(\frac{5}{10000} \right) = \left(\frac{-1}{2000} \right)$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{3,2}{(-0,04)} = -80$$

$$s_1^2 s_2^2 = (-80)(-2000) = 16000$$

$$(a_{11} + a_{22}) = ((0,44) + (0,31)) = 0,75 = (s_1^2 - s_2^2) K$$

$$\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} = \sqrt{(0,44 - 0,31)^2 + (0,84)^2} = (-0,85) = (s_1^2 + s_2^2) K$$

dividendo per K

$$(s_1^2 - s_2^2) = (0,75)(-2000) = -1500$$

$$(s_1^2 + s_2^2) = (-0,85)(-2000) = +1700$$

sommando: $2s_1^2 = 200$; $s_1^2 = 100 \rightarrow \boxed{s_1 = 10}$

sottraendo: $-2s_2^2 = -3200$; $s_2^2 = +1600 \rightarrow \boxed{s_2 = 40}$

Nell'iperbole ad assi ruotati e traslati non vi è ambiguità per $\alpha \neq 90^\circ$ cioè $s_1 = b$; $s_2 = a$ ed $a =$ asse focale.

Punti del cono sugli assi:

L'iperbole incontra l'asse x ; ($y=0$) nei punti:

$$0,44x^2 + 2(1,521895)x - 2,72572336 = 0$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = -3,458852273 \pm 4,261277375 = \begin{cases} -7,720129648 \\ +0,802425102 \end{cases}$$

L'iperbole incontra l'asse y ; ($x=0$) nei punti

$$0,31y^2 + 2(1,375544171)y - 2,72572336 = 0$$

$$\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} = -4,437239261 \pm 5,33682942 = \begin{cases} -9,774068681 \\ +0,899590159 \end{cases}$$

Il cono incontra l'asse z ($x=0$; $y=0$) nei punti:

$$0,65z^2 - 2(1,468427661)z - 2,72572336 = 0$$

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} = +2,259119478 \pm 3,049105011 = \begin{cases} +5,308224489 \\ -0,789985533 \end{cases}$$

Intersezione del cono col piano xz ($y=0$)

L'equazione diventa:

$$(0,44)x^2 + (0,65)z^2 - 2(0,232379)xz + 2(1,521895)x - 2(1,468427661)z - 2,72572336 = 0$$

Il determinante delle coniche: $A = a_{33}A_{33} - a_{23}A_{23} + a_{13}A_{13}$

$$\begin{vmatrix} 0,44 & -0,232379 & +1,521895 \\ -0,232379 & +0,65 & -1,468427661 \\ +1,521895 & -1,468427661 & -2,72572336 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2,72572336(0,232) & = -0,63236783 \\ +1,468427661(-0,992451733) & = -0,42944421 \\ +1,521895(-0,648) & = -0,98618796 \end{cases}$$

$A \neq 0$ (conica non degenera)

$$A = -2,048$$

$A_{33} = +0,232 > 0$ (caso ellittico); $a_{11}A < 0$; $a_{22}A < 0$ (ellisse reale)

$a_{12} \neq 0$ (assi ruotati); $a_{23} \neq 0$; $a_{13} \neq 0$ (assi traslati)

coordinate del centro traslato "c"

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-0,648}{+0,232} = \boxed{-2,793103448 = X_c}$$

$$\frac{-A_{23}}{A_{33}} = \frac{+0,292451733}{+0,232} = \boxed{+1,260567815 = Z_c}$$

angolo di rotazione degli assi: " α_e "

$$\begin{aligned} \tan(2\alpha_e) &= \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{-2(0,232379)}{(0,44 - 0,65)} = \frac{-2(0,6)\sqrt{0,15}}{-(0,21)} = \left(\frac{40}{7}\sqrt{0,15}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{240}}{7}\right) = \boxed{\tan(2\alpha_e) = 2,2133334} \quad \boxed{\alpha_e = 32^\circ 50' 31,67''} \end{aligned}$$

$$\cos(2\alpha_e) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\alpha_e)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{240}{49}}} = \frac{7}{\sqrt{49 + 240}} = \left(\frac{7}{17}\right)$$

$$\cos(2\alpha_e) = \left(\frac{7}{17}\right); \quad \cos(\alpha_e) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha_e)}{2}} = \sqrt{\frac{17 + 7}{2 \cdot 17}} = \sqrt{\frac{24}{34}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_e) = \sqrt{\frac{12}{17}}} \quad \sin(\alpha_e) = \sqrt{1 - \frac{12}{17}} = \boxed{\sin(\alpha_e) = \sqrt{\frac{5}{17}}}$$

calcolo degli assi

$$K_{1,2}^2 = a_{11}X_c^2 + a_{22}Z_c^2 + 2a_{12}X_cZ_c - a_{33} = \frac{-A}{A_{33}}$$

$$\begin{aligned} K_{1,2}^2 &= (0,44)(-2,793103448)^2 + (0,65)(1,260567815)^2 + (-0,464758)(-2,793103448) \dots \\ &\dots (1,260567815) + 2,72572336 \end{aligned}$$

$$K_{1,2}^2 = 3,432627823 + 1,03287029 + 1,636364727 + 2,72572336 =$$

$$K_{1,2}^2 = 8,827586200 = \frac{2,048}{0,232}$$

$$\begin{aligned} J_1^2 &= \frac{2(K_{1,2}^2)}{(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}} = \frac{2(8,8275862)}{(0,44 + 0,65) + \sqrt{(0,44 - 0,65)^2 + (0,464758)^2}} = \\ J_2^2 &= \frac{17,65517240}{1,09 + \sqrt{0,2601}} = \frac{17,65517240}{1,09 - 0,51} = J_1^2 = 30,43995234 \\ &= \frac{17,65517240}{1,09 + 0,51} = J_2^2 = 11,03448276 \end{aligned}$$

$$a_1 = a = \sqrt{30,43995234} = \boxed{a = 5,51724137}$$

$$a_2 = b = \sqrt{11,03448276} = \boxed{b = 3,32181919}$$

Intersezione del cono col piano yz (x=0)

L'equazione diventa:

$$\left[\underset{a_{11}}{0,31} y^2 + \underset{a_{22}}{0,65} z^2 - 2 \underset{2a_{12}}{0,271108834} yz + 2 \underset{2a_{13}}{1,375544171} y - 2 \underset{2a_{23}}{1,468427661} z - \underset{a_{33}}{2,72572336} = 0 \right]$$

Il determinante delle coniche: $A = a_{13}A_{31} + a_{23}A_{32} + a_{33}A_{33}$:

$$\begin{vmatrix} +0,31 & -0,271108834 & +1,375544171 \\ -0,271108834 & +0,65 & -1,468427661 \\ +1,375544171 & -1,468427661 & -2,72572336 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2,72572336 (0,128) = -0,348892591 \\ +1,468427661 (-0,0822904) = -0,120837500 \\ +1,375544171 (-0,496) = -0,682269909 \end{cases}$$

$A \neq 0 \rightarrow$ (conico non degenero)

$$A = -1,152000$$

$A_{33} = +0,128 > 0 \rightarrow$ (caso ellittico); $(a_{11}A < 0; a_{22}A < 0) \rightarrow$ (ellisse reale)

equazione completa $\rightarrow$ ellisse ad assi ruotati e traslati.

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-0,496}{+0,128} =$$

$$\boxed{y_c = -3,875000}$$

$$\frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{+0,0822904}{+0,128} =$$

$$\boxed{z_c = +0,642893750}$$

} coordinate
del centro
"C"

angolo di rotazione assi:

$$\tan(\alpha) = \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{-0,542217668}{(0,31 - 0,65)} = +1,594757847 \quad (>0)$$

$$\boxed{\alpha_c = 28^\circ 57' 18''}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = 0,5312500 ; \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = 0,875 ;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,484122918. \quad \text{---} \quad \boxed{\cos \alpha_c = 0,875} :$$

calcolo degli assi:

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{1,152}{0,128} = 9,$$

verifichiamo:

$$K s_1^2 s_2^2 = a_{11} y_c^2 + a_{22} z_c^2 + 2a_{12} y_c z_c - a_{33}$$

$$= K s_1^2 s_2^2 = 0,31(3,875)^2 + 0,65(0,64289375)^2 - 0,542217668(3,875)(0,64289375) + 2,72572336$$

$$K s_1^2 s_2^2 = 4,65484 + 0,268653043 + 1,350779856 + 2,72572336 = 9$$

$$s_1^2 = \backslash \quad s_2^2 = / \quad = \frac{2(9)}{(0,31 + 0,65) \pm \sqrt{(0,31 - 0,65)^2 + (0,542217668)^2}} = \frac{18}{(0,96) \pm \sqrt{0,4096}}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \backslash \\ b^2 &= / \end{aligned} = \frac{18}{0,96 \mp 0,64} = \begin{cases} \frac{18}{0,32} = 5,625 \rightarrow \boxed{a = 7,5} \\ \frac{18}{1,6} = 1,125 \rightarrow \boxed{b = 3,354101968} \end{cases}$$

Gli elementi calcolati ci consentono di fare un disegno prospettico del cono assegnato.

Aggiungiamo al disegno anche l'intersezione del cono col piano: $0,6x + 0,7y + 1,15z = 0$ che passa per P e per l'origine degli assi.

L'intersezione è un cerchio perché il piano è normale all'asse del cono. Il cerchio di centro P' e raggio $R = PV \sin \varphi = \frac{1}{2} \overline{PT} = \frac{1}{2}(6,536491673) = \overline{PR}$

$$= \boxed{R = 3,268245837}$$

Poiché $R = 3268245837 > \overline{OP} = 2,697086689$ vuol dire che nessuna generatrice del cono passa per l'origine O .
 Se uniamo P con O e da P riportiamo $\pm R$, si ottengono gli estremi del diametro: $\overline{CD}$, ove

$$X_C = \frac{X_P}{\overline{OP}} (\overline{OP} + R) = \frac{-0,921895}{2,697086689} (2,697086689 + 3,268245837) =$$

$$X_D = \frac{X_P}{\overline{OP}} (\overline{OP} - R) =$$

$$\boxed{X_C = -2,039018713} ; \boxed{X_D = +0,195228713}$$

$$Y_C = \frac{Y_P}{\overline{OP}} (\overline{OP} + R) = (-0,575544171)(2,11768925) = \boxed{Y_C = -1,212970712}$$

$$Y_D = \frac{Y_P}{\overline{OP}} (\overline{OP} - R) = (-0,575544171)(-0,211768925) = \boxed{Y_D = +0,12188237}$$

$$Z_C = \frac{Z_P}{\overline{OP}} (\overline{OP} + R) = (+2,468427661)(2,11768925) = \boxed{Z_C = +5,459591594}$$

$$Z_D = \frac{Z_P}{\overline{OP}} (\overline{OP} - R) = (+2,468427661)(-0,211768925) = \boxed{Z_D = -0,522736272}$$

si verificano i calcoli: $\frac{1}{2} (\sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} + \sqrt{X_D^2 + Y_D^2 + Z_D^2}) = R$.

L'equazione del cerchio intersezione del cono col piano: $0,6X + 0,7Y + \sqrt{0,15}Z = 0$ può anche esprimersi come intersezione d'ella sfera: $(X - X_P)^2 + (Y - Y_P)^2 + (Z - Z_P)^2 = R^2$

Altre coordinate dei punti del cerchio possiamo determinarle facendo passare per "p" un piano parallelo a Z ed Y ; avremo: $X = X_P$, sostituendo nelle due equazioni del cerchio: $(0,6)(-0,921895) + 0,7Y + \sqrt{0,15}Z = 0 \Rightarrow Y = \frac{\sqrt{0,15}}{0,7}Z + 0,790195714$

$$(Y + 0,575544171)^2 + (Z - 2,468427661)^2 = R^2 = 10,68143085$$

analogamente col piano: $Z = Z_P$ parallelo ad XY , avremo le due coppie di punti, rispettivamente aventi le stesse ascisse X_P , o

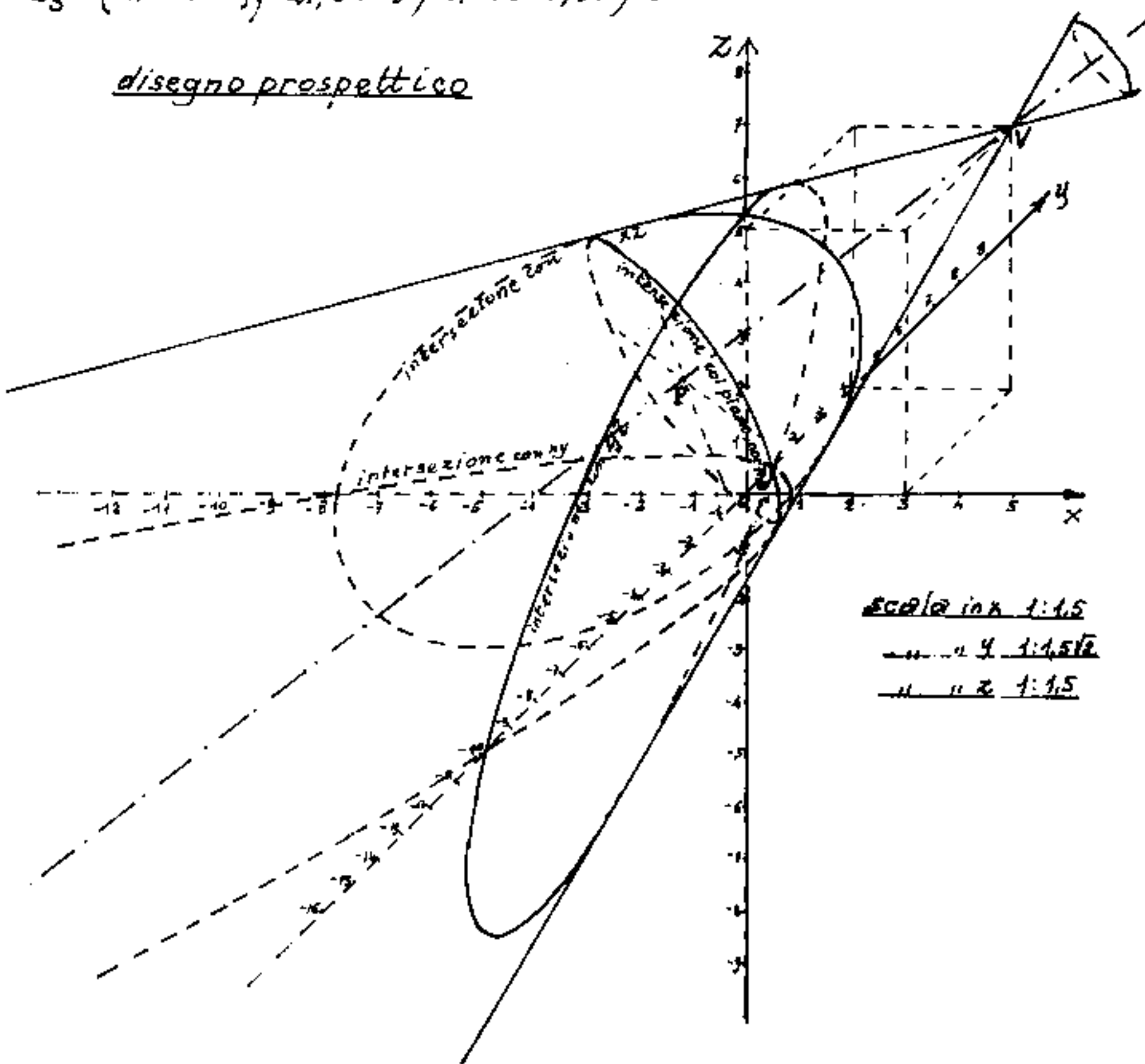
le stesse ordinate z_p , o le stesse ordinate y_p se il piano è parallelo a zx ; nei tre casi avremo le coordinate degli estremi dei diametri:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\equiv (-0,921895; -2,157177; 5,328143) \\ B_1 &\equiv (-0,921895; 1,006689; -0,3912875) \end{aligned} \right\} \text{(parallelo ad } yz)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &\equiv (-2,459039; -0,575544171; 4,850636) \\ B_2 &\equiv (0,8639873; -0,575544171; -0,2982493) \end{aligned} \right\} \text{(parallelo ad } xz)$$

$$\left. \begin{aligned} A_3 &\equiv (-3,403332; 1,555402; 2,468427661) \\ B_3 &\equiv (1,559451; -2,70249; 2,468427661) \end{aligned} \right\} \text{(parallelo ad } xy)$$

disegno prospettico



scala in x 1:1,5

 " y 1:1,5√2

 " z 1:1,5

3 polinomi di 2° grado in tre variabili

Sia:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44} = 0$$

il polinomio completo, esso rappresenta la superficie di un solido che sezionato con un piano dà una conica. Tali superfici sono dette: "quadriche".
Sappiamo che le coniche, come prima distinzione, possono essere: "degeneri" o "non degeneri" a seconda che il determinante dei coefficienti, particolarmente definito come: "determinante delle coniche", sia zero o diverso da zero. In particolare

$$A \begin{cases} = 0 \rightarrow A_{33} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{(coppia di rette convergenti immaginarie coniugate)} \\ = 0 \rightarrow \text{(coppia di rette parallele)} (a_{11} \neq 0) A_{22} \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{(rette reali e distinte)} \\ = 0 \rightarrow \text{(coincidenti)} \\ > 0 \rightarrow \text{(immaginarie coniugate)} \end{cases} \\ < 0 \rightarrow \text{(coppia di rette reali e distinte)} \end{cases} \\ \neq 0 \rightarrow A_{33} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{(caso ellittico)} \rightarrow A_{11} \text{ ed } A_{22} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{(ellisse immaginario)} \\ < 0 \rightarrow \text{(ellisse reale)} \end{cases} \\ = 0 \rightarrow \text{(caso parabolico)} \rightarrow \text{parabola} \\ < 0 \rightarrow \text{(caso iperbolico)} \rightarrow \text{iperbole} \text{ se } (a_{11} + a_{22} = 0) \rightarrow \text{equilatera} \end{cases} \end{cases}$$

Quindi nel caso di un cilindro, l'intersezione con un piano parallelo alle generatrici sarà: $A = 0$; $A_{33} = 0$;
nel caso del cono, l'intersezione con un piano passante per il vertice sarà $A = 0$; $A_{33} < 0$; (se contiene generatrici).

Al fine di uniformarci al simbolismo usato per le coniche consideriamo il determinante che indicheremo con A (il determinante A delle coniche diverrà il minore: A_{44} ed il minore A_{33} diverrà A_{334} , ecc)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A = \begin{cases} + a_{44} \cdot A_{44} = a_{44} \begin{cases} a_{33} A_{334} \\ -a_{32} A_{324} \\ a_{31} A_{314} \end{cases} \\ - a_{43} A_{43} = -a_{43} \begin{cases} a_{34} A_{343} \\ -a_{32} A_{323} \\ a_{31} A_{313} \end{cases} \\ + a_{42} A_{42} = a_{42} \begin{cases} a_{34} A_{342} \\ -a_{33} A_{332} \\ a_{31} A_{312} \end{cases} \\ - a_{41} A_{41} = -a_{41} \begin{cases} a_{34} A_{341} \\ -a_{33} A_{331} \\ +a_{32} A_{321} \end{cases} \end{cases}$$

Dovremo distinguere i solidi, le cui superfici sono continue anche nelle derivate (cioè non presentano spigoli rettilinei o curvilinei), in varie specie:

- 1) solidi di rotazione, cioè generati dalla rotazione di una linea intorno ad un asse, (istante per istante la linea e l'asse sono complanari), si hanno così: la sfera, il cilindro, il cono, i paraboloidi di rotazione, gli ellissoidi di rotazione, gli iperboloidi di rotazione; in genere tutti i solidi che sezionati

con piani normali all'asse di rotazione diano delle circonferenze come linee di intersezione.

Cio' premesso, questi solidi, oltre che un asse di simmetria possono avere un centro di simmetria (che stará sull'asse ed indicheremo con C) oppure un vertice che indicheremo con V o un punto caratteristico dell'asse che indicheremo genericamente con P . Quindi l'equazione dell'asse sarà del tipo:

$$\frac{(x-x_p)}{\cos\alpha} = \frac{(y-y_p)}{\cos\beta} = \frac{(z-z_p)}{\cos\gamma}$$

ove a P , caso per caso possiamo sostituire " C " o " V ".

I piani normali a tale asse avranno per equazione:

$$(\cos\alpha)x + \cos\beta y + \cos\gamma z = \delta$$

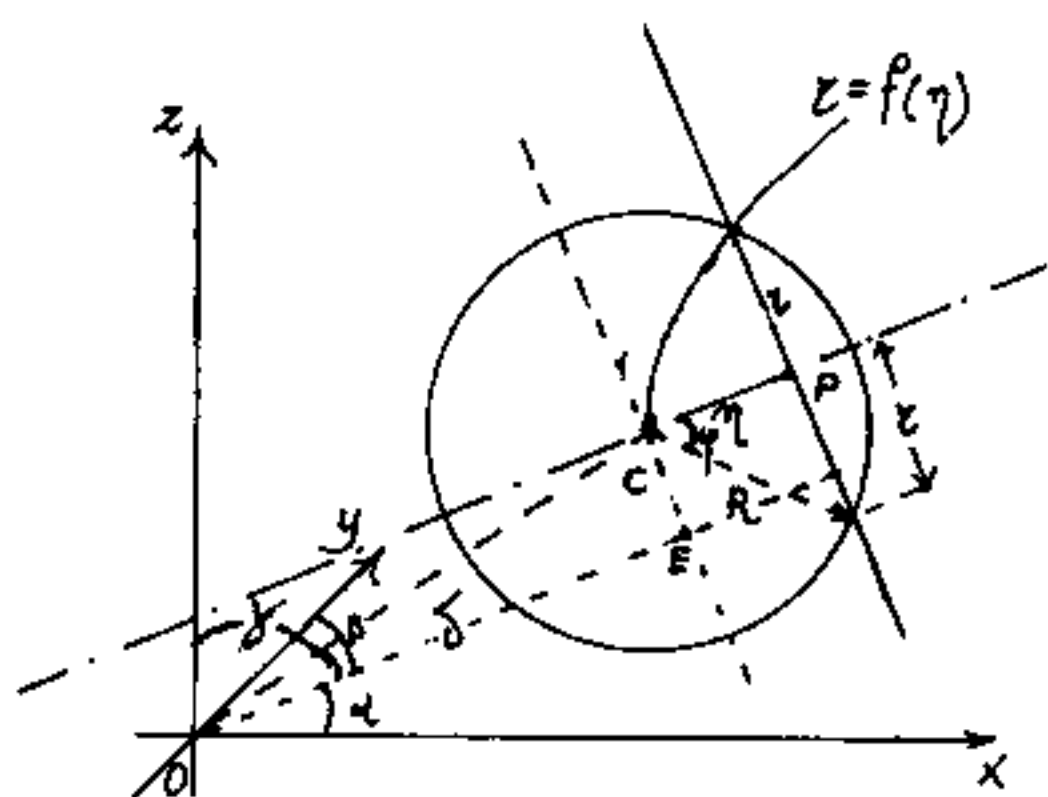
ove δ è la distanza dall'origine degli assi.

Poichè su tali piani debbono insistere delle circonferenze come intersezioni coi solidi di rotazione; consideriamo l'insieme delle sfere di centro, " P ", o " C ", o " V ", a raggio variabile R la loro equazione sarà:

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$$

Vogliamo ora definire l'intersezione di queste sfere con i relativi piani in modo che l'equazione

rappresenti la superficie del solido di rotazione.



Indichiamo con " η " la distanza del piano dal centro c della sfera, e con " z " il raggio della circonferenza intercettata; avremo: ($\eta = \overline{CP}$)

$$R^2 = \eta^2 + z^2$$

ma z può esprimersi in funzione di " η ", (funzione caratteristica della curva che ruota intorno all'asse): $z = f(\eta)$ cioè:

$$R^2 = \eta^2 + [f(\eta)]^2$$

(ove " η " è l'ascissa ed " z " l'ordinata del sistema di assi ruotati e traslati in C). Il piano per C normale all'asse η , sarà

rappresentato: $\cos \alpha (x - x_c) + \cos \beta (y - y_c) + \cos \gamma (z - z_c) = 0$

ove:

$$(\cos \alpha)x_c + \cos \beta (y_c) + \cos \gamma (z_c) = \overline{OE}$$

da non confondersi con $\overline{OC} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}$ perché

il segmento $\overline{OC}$, ha coseni direttori diversi da $\overline{OE}$

cioè il piano normale passante per P avrà per equazione:

$$\cos \alpha (x - x_c) + \cos \beta (y - y_c) + \cos \gamma (z - z_c) = \eta$$

passiamo dire:

$$[\cos \alpha (x - x_c) + \cos \beta (y - y_c) + \cos \gamma (z - z_c)]^2 + [f(\cos \alpha (x - x_c) + \cos \beta (y - y_c) + \cos \gamma (z - z_c))]^2 = R^2$$

Uguagliando le due espressioni di R^2 cioè quella della sfera e quella in funzione dell'equazione del piano si ha la formula generale dell'equazione dei solidi di rotazione generati da una linea $\boxed{\eta = f(\tau)}$ che ruota intorno ad un asse η'' di centro c

e ordinate τ $\boxed{\frac{(x-x_c)}{\cos \alpha} = \frac{(y-y_c)}{\cos \beta} = \frac{(z-z_c)}{\cos \gamma}} = (\text{equaz. dell'asse})$

L'equazione generale dei solidi di rotazione sarà:

$$\boxed{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = \left[(x-x_c)\cos \alpha + (y-y_c)\cos \beta + (z-z_c)\cos \gamma \right]^2 + \left[f\left((x-x_c)\cos \alpha + (y-y_c)\cos \beta + (z-z_c)\cos \gamma \right) \right]^2}$$

Nel caso della sfera: $(\tau^2 = R^2 - \eta^2)$ per cui: $R^2 = \cancel{\eta^2} + R^2 - \cancel{\eta^2}$ rimane $R = \text{costante}$ e non entra in gioco il piano.

Nel caso del cilindro: $(\tau^2 = (f(\eta))^2 = R^2 = (\text{equaz. sf.}) = [\eta^2] + R^2$ e si ha l'equazione del piano elevata a quadrato $+ R^2$.

Nel caso del cono: $\tau = R \sin \varphi$; $\eta = R \cos \varphi$; $\frac{\tau^2}{\cos^2 \varphi} = R^2$; perciò l'equazione del piano elevata al quadrato e divisa per il quadrato del coseno dell'angolo di semiapertura è uguagliata all'equazione della sfera. Per $\varphi = 0$ $\cos \varphi = 1$ il cono si ridurrebbe all'asse di rotazione e bisogna aggiungere R^2 per ottenere il cilindro.

Questi casi sono già stati trattati, cerchiamo di generalizzare la formula a casi particolari.

Affinché il solido possa essere espresso dal polinomio di 2° grado in 3 variabili, la funzione: $(z = f(\eta))$ deve essere una conica al centro.

Ricordiamo: $z^2 + \eta^2 = R^2$ (circonferenza) $\rightarrow$ (sfera)

$\frac{z^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ (ellisse con asse focale su z) $\rightarrow$ ellissoide di rotazione ($a > b$)

$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (ellisse con asse focale su η) $\rightarrow$ ellissoide di rotazione

$\eta = \left(\frac{z^2}{4a}\right)$ (parabola con fuoco su η) $\rightarrow$ paraboloide di rotazione

$\frac{\eta^2}{4a} = z$ (parabola con fuoco su z) $\rightarrow$ paraboloide coniugato di rotazione

$\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ (iperbole con fuochi su η) $\rightarrow$ iperboloide di rotazione

$-\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (iperbole con fuochi su z) $\rightarrow$ iperboloide coniugato di rotazione

I solidi di rotazione al centro

Consideriamo l'asse di rotazione η coincidente con l'asse z , cioè il piano che interseca la sfera al centro: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = f(\eta) = f(z)$ sarà: $z = \eta$ e portando z sotto la funzione avremo che l'intersezione si presenta:

$$\boxed{x^2 + y^2 = f(z)}$$

la formula è al centro assi, ma, possiamo facilmente traslare in $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$ ed avremo:

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = f^2(z-z_c)$$

ove l'asse è sempre parallelo a z .

Iniziamo la trattazione con solidi al centro.

$x^2 + y^2 = z^2$ abbiamo visto è un cono con asse coincidente con l'asse z ed apertura $2(45^\circ) = 90^\circ$

se il cono ha apertura 2φ avremo: $x^2 + y^2 = (z \operatorname{tg} \varphi)^2$

Se poniamo:

$$x^2 + y^2 = z$$

per $x=0$; o per $y=0$ abbiamo la parabola: $z=x^2$ oppure $z=y^2$, (ove $4a=1$); essendo "a" la distanza del fuoco dal vertice della parabola possiamo scrivere:

$$x^2 + y^2 = 4a \cdot z$$

e rappresenta un paraboloidi di rotazione, con asse z , vertice al centro assi e modulo "a".

se l'asse di rotazione è l'asse x , avremo:

$$y^2 + z^2 = 4ax$$

Per ora, la condizione per la quale il polinomio di 2° grado rappresenti un paraboloidi di rotazione, intorno ad un asse cartesiano è che mantenga il coefficiente del quadrato della coordinata asse.

Cio' vale anche se operiamo una traslazione:

per es. $\boxed{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = 4a(z-z_c)}$ è un paraboloide di rotazione con asse parallelo a z e vertice in $c = (x_c, y_c, z_c)$, la cui equazione si presenta:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0}$$

ove:

$$a_{11} = K; \quad a_{22} = K; \quad 2a_{14} = -2Kx_c; \quad 2a_{24} = -2Ky_c; \quad 2a_{34} = 2Kz_c;$$

$$a_{44} = K(x_c^2 + y_c^2 + 4az_c).$$

Supponiamo ancora che l'asse z , sia asse del solido di rotazione e consideriamo l'espressione

$\boxed{x^2 + y^2 = a^2 - \left(\frac{z}{b}\right)^2}$ si nota che per ogni valore di z si ha una circonferenza reale finché: $a^2 - \left(\frac{z}{b}\right)^2 \geq 0$; poi è immaginaria, perché la somma di due quadrati non può essere un numero negativo. Per $x=0$ oppure per $y=0$, si ha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{(b)^2} = 1$; oppure: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{(b)^2} = 1$ che rappresentano l'ellisse di semiasse (a) ed (b) avente un asse coincidente con l'asse di rotazione z , si ha cioè un ellissoide di rotazione che trasla-

to diventa: $\boxed{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = a^2 - \frac{(z-z_c)^2}{b^2}}$

avremo:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0}$$

$$a_{11} = Kb^2; \quad a_{22} = Kb^2; \quad a_{33} = Kc^2; \quad 2a_{14} = 2Kb^2x_c; \quad 2a_{24} = 2Kb^2y_c; \quad 2a_{34} = 2Kz_c;$$

$$a_{44} = K(b^2x_c^2 + b^2y_c^2 + z_c^2 - a^2b^2).$$

L'ellissoide propriamente detto, si distingue dall'ellissoide di rotazione perche' sezionato con piani $z=0$; $y=0$; $x=0$, presenta come intersezione un ellisse cioè non ha circonferenze e non è un solido di rotazione. La sua equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ad assi traslati:

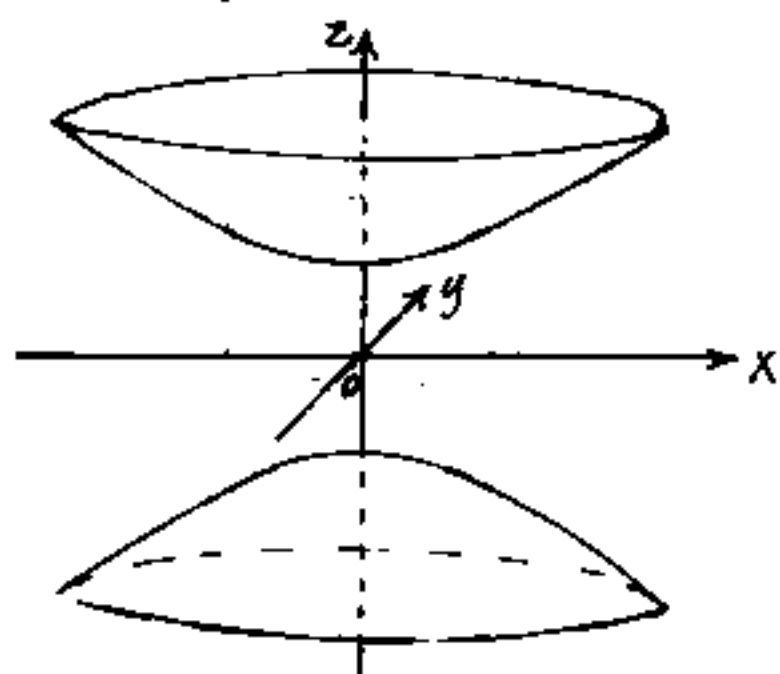
$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} + \frac{(z-z_c)^2}{c^2} = 1$$

$$a_{11} = K b^2 c^2 \quad ; \quad a_{22} = K a^2 c^2 \quad ; \quad a_{33} = K a^2 b^2 \quad ;$$

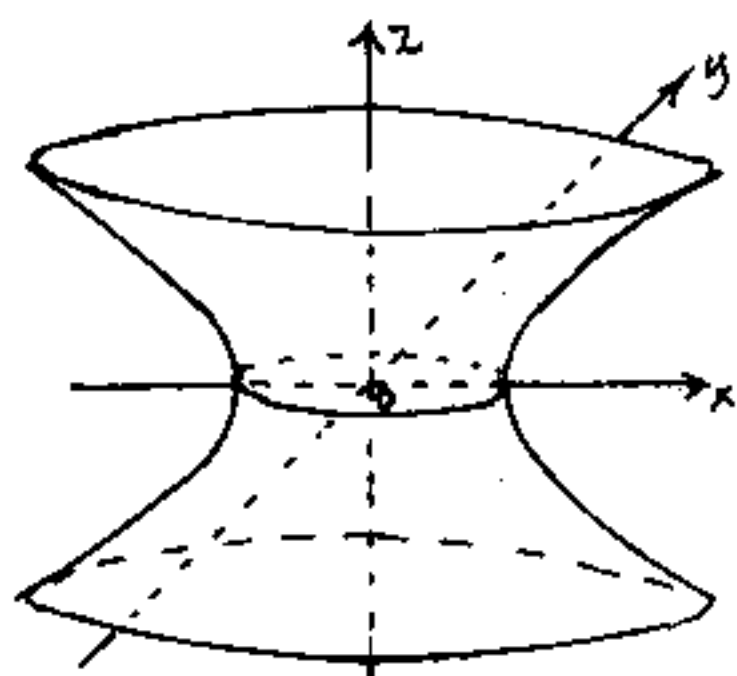
$$a_{14} = -2K b^2 c^2 x_c \quad ; \quad a_{24} = -2K a^2 c^2 y_c \quad ; \quad a_{34} = -2K a^2 b^2 z_c$$

$$a_{44} = K(x_c^2 b^2 c^2 + y_c^2 a^2 c^2 + z_c^2 a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2)$$

Vediamo ora l'equazione dell'iperboloide di rotazione, assumendo ancora l'asse z come asse di rotazione, si hanno due solidi diversi per le due iperboli coniugate



iperboloide a due falde



iperboloide ad una falda

Ricordiamo che mentre nell'ellisse l'asse focale è il maggiore, nell'iperbole l'asse focale è quello positivo. (che indipendentemente dal valore assoluto è ancora relativamente il maggiore). Avremo quindi: per la seconda figura:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1}$$

L'asse focale è sul piano xy , ove il fuoco descrive una circonferenza

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1}$$

L'asse focale è su z che è anche asse di rotazione. (prima figura)

moltiplicando per $a^2 b^2$ si ha:

$$\boxed{b^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 z^2 \mp a^2 b^2 = 0}$$

ove il segno del termine noto indica quale dei due casi.

Ad essi spostati avremo:

$$\boxed{b^2 (x - x_c)^2 + b^2 (y - y_c)^2 - a^2 (z - z_c)^2 \mp a^2 b^2 = 0}$$

$$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0}$$

Si noti che le formule esaminate trattano solidi di rotazione con assi al centro, o con assi traslati, mancano i casi di assi ruotati, perciò mancano i coefficienti: $2a_{12}$; $2a_{13}$; $2a_{23}$; caratteristici della rotazione dell'asse, come i coefficienti $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$ sono caratteristici della traslazione.

Per lo studio del problema inverso, sono di fondamentale importanza i coefficienti: a_{11} ; a_{22} ; a_{33} .

Se: $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ il solido è una sfera, reale o immaginaria (è immaginaria per es: $x^2 + y^2 + z^2 = -R^2$)

Se due coefficienti, dei quadrati delle variabili, sono uguali fra loro; per es:

$a_{11} = a_{22}$ si ha un solido di rotazione intorno al terzo asse (z). (Anche il cono è un solido di rotazione, ed il cilindro è un cono con vertice all'infinito). Anche in questo caso si può avere un solido immaginario ($x^2 + y^2 = -R^2$).

con: $a_{11} = a_{22}$; $a_{33} = 0$ si ha un paraboloidi di rotazione con asse z = asse di rotazione

Ovviamente gli assi sono scambiabili fra loro, noi continueremo a considerare l'asse z come asse di rotazione, ma se scambiamo z con x o z con y avremo che l'asse di rotazione sarà x ed y . (Per esempio un paraboloidi di rotazione intorno all'asse x avrà: $a_{33} = a_{22}$; $a_{11} = 0$)

$a_{11} = a_{22}$ entrambi > 0 ; $a_{33} > 0$; $a_{44} < 0$ e siano nulli tutti gli altri coefficienti, si ha un ellissoide di rotazione al centro, intorno all'asse z .

Analogamente:

$a_{11} = a_{22}$ entrambi > 0 ; $a_{33} < 0$; $a_{44} \begin{cases} \geq 0 \rightarrow \text{iperboloidi di rotazione al centro} \\ = 0 \rightarrow \text{cono con vertice al centro} \end{cases}$

Tutti gli altri coefficienti sono nulli e l'asse di rotazione è l'asse z . ; $a_{44} \begin{cases} > 0 \text{ fuoco sull'asse } z \\ < 0 \text{ fuoco sul piano } xy \text{ (circonferenza).} \end{cases}$

Esempio numerico

Studiare il polinomio:

$$4,5x^2 + 4,5y^2 - 2z^2 - 36x - 45y + 4z + 164,5 = 0$$

Il polinomio può essere stato moltiplicato o diviso per un K arbitrario perciò dividiamo l'intera equazione per $\{a_{11} = a_{22}\}$. Questa uguaglianza ci indica: "solido di rotazione intorno ad un asse parallelo a Z (non coincidente perché: a_{14}, a_{24}, a_{34} sono diversi da zero)

L'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{4,5}z^2 - 2(4)x - 2(5)y + 2\left(\frac{2}{4,5}\right)z + \frac{164,5}{4,5} = 0$$

dividendo per a_{33} il coeff. $2a_{34} = 2(1)$ perciò: la traslazione di assi da "O" a "C" è $C \equiv (4; 5; 1)$.

$$\text{ora } a_{44} = a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 \begin{cases} \pm a^2b^2K & (\text{se è un iperboloide}) \\ = 0 & (\text{se è un cono}) \end{cases}$$

$$+ 36 = -2Ka^2x_c; \rightarrow -36 = -2Ka^2 \cdot 4 = -8a^2K \Rightarrow Ka^2 = \frac{9}{2} = a_{11}$$

$$- 45 = -2Ka^2y_c; \rightarrow -45 = -2Ka^2 \cdot 5 \Rightarrow Ka^2 = \frac{9}{2} = a_{22}$$

$$+ 4 = 2Kb^2z_c; \rightarrow 4 = 2Kb^2 \cdot 1 \Rightarrow Kb^2 = 2$$

$$a_{44} = \frac{164,5}{4,5} = 36,55\bar{5} = a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 \pm a^2b^2K$$

$$= x_c^2 + y_c^2 + \frac{9}{2}z_c^2 \pm a^2$$

$$= 16 + 25 - \frac{2}{4,5} \pm a^2$$

$$a^2 = 36,55\bar{5} - 40,55\bar{5} = \boxed{-a^2 = -4} \quad \text{perciò } K = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{L'equazione origine: } 9x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 72x - 90y + 8z + 329 = 0$$

$$\boxed{b^2 = 9}; \quad \boxed{a^2 = 4}; \quad a^2b^2 = 329 - 9(16+25) + 4 = \boxed{-36 = a^2b^2} \text{ quindi}$$

è un iperboloide di rotazione intorno a Z con fuoco su xy .

Ellissoide di Rotazione al centro assi

La formula generale dei solidi di rotazione è:

$$\bar{e}: (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = \eta^2 + [f(\eta)]^2$$

ove: $\eta = (x-x_c)\cos\alpha + (y-y_c)\cos\beta + (z-z_c)\cos\gamma$

rappresenta la distanza del piano dal centro "c" misurata perpendicolarmente al piano, ma η , misurata in tal senso, è sull'asse di rotazione $f(\eta)$, rappresenta una funzione dovuta alla curva che ruota, cioè posto: $z = f(\eta)$ questa sarà l'equazione della curva al centro assi; nel nostro caso: (ellissoide di rotazione di semiasse: a e b con $a > b$) se vogliamo che ruoti intorno all'asse minore dovremo scrivere:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad \text{cioè: } z^2 = \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} \eta^2 \right)$$

Ma il raggio (variabile) R della sfera $\bar{e}$ è dato

da: $R^2 = \eta^2 + z^2$ $R^2 = \eta^2 + a^2 - \frac{a^2}{b^2} \eta^2 = \frac{(b^2 - a^2)\eta^2 + a^2 b^2}{b^2}$

Se l'ellissoide $\bar{e}$ al centro assi $x_c=0$; $y_c=0$; $z_c=0$

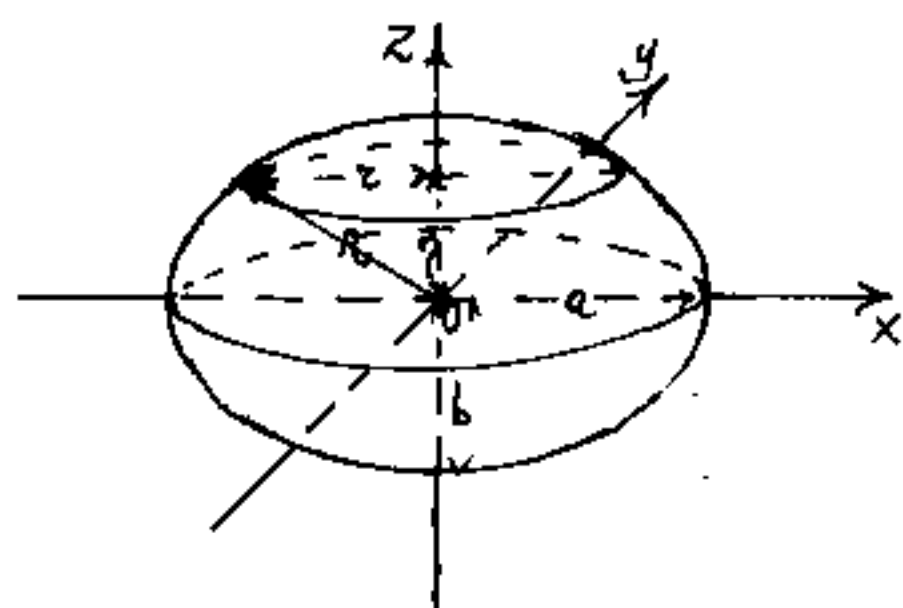
Se, per asse di rotazione poniamo l'asse "z", -ti

ha: $\cos\alpha = \cos(90^\circ) = 0$; $\cos\beta = \cos(90^\circ) = 0$; $\cos\gamma = \cos(0) = 1$

per cui $\eta = [0 + 0 + z]$; ed $x^2 + y^2 + z^2 = z^2 + a^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2$

Cioè:

$$b^2x^2 + b^2y^2 + a^2z^2 - a^2b^2 = 0$$



equazione dell'ellissoide di rotazione
de di rotazione ol cen
tro assi. (asse di rota-
 zione z , semidiametri:
 a = ruotante, b in asse)

Ellissoide di rotazione ad assi traslati

$$b^2(x-x_c)^2 + b^2(y-y_c)^2 + a^2(z-z_c)^2 - a^2b^2 = 0$$

sviluppando i quadrati:

$$\underbrace{b^2x^2}_{a_{11}} + \underbrace{b^2y^2}_{a_{22}} + \underbrace{a^2z^2}_{a_{33}} - \underbrace{2(b^2x_c)x}_{a_{14}} - \underbrace{2(b^2y_c)y}_{a_{24}} - \underbrace{2(a^2z_c)z}_{a_{34}} + \underbrace{(b^2x_c^2 + b^2y_c^2 + a^2z_c^2 - a^2b^2)}_{a_{44}} = 0$$

mancono i coefficienti: $(2a_{12}, 2a_{13}, 2a_{23})$ della rotazione.

Il determinante sarà:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta =$$

$$a_{44} a_{33} A_{434} = a_{44} a_{33} (a_{22} a_{11}) = (a_{11} a_{22} a_{33}) a_{44}$$

$$a_{34} a_{34} A_{433} = a_{34}^2 (a_{22} a_{11}) = (a_{11} a_{22} a_{33}) \frac{a_{34}^2}{a_{33}}$$

$$a_{24} a_{33} A_{432} = a_{24} a_{33} (a_{11} a_{34}) = (a_{11} a_{22} a_{33}) \frac{a_{24}^2}{a_{22}}$$

$$a_{14} a_{33} A_{431} = a_{14} a_{33} (a_{22} a_{34}) = (a_{11} a_{22} a_{33}) \frac{a_{14}^2}{a_{22}}$$

sommando:

$$\Delta = (a_{11} a_{22} a_{33}) \left(a_{44} + \frac{a_{34}^2}{a_{33}} + \frac{a_{24}^2}{a_{22}} + \frac{a_{14}^2}{a_{22}} \right)$$

Sostituendo i valori:

$$K^4 \left(b^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \right) \left(\cancel{b^2 x_c^2} + \cancel{b^2 y_c^2} + \cancel{a^2 z_c^2} - a^2 b^2 - \cancel{\frac{b^2 x_c^2}{a^2}} - \cancel{\frac{b^2 y_c^2}{a^2}} - \cancel{\frac{a^2 z_c^2}{a^2}} \right) = \Delta$$

$$\boxed{\Delta = -K^4 a^4 b^6}$$

Ricordiamo i simboli dei minori del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{44} = \begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 b^4 (K^3)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix} = A_{43} = \begin{vmatrix} b^2 & 0 & -b^2 x_c \\ 0 & b^2 & -b^2 y_c \\ 0 & 0 & -a^2 z_c \end{vmatrix} = -a^2 b^4 z_c (K^3)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = A_{42} = \begin{vmatrix} b^2 & 0 & -b^2 x_c \\ 0 & 0 & -b^2 y_c \\ 0 & a^2 & -a^2 z_c \end{vmatrix} = a^2 b^4 y_c (K^3)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = A_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b^2 x_c \\ b^2 & 0 & -b^2 y_c \\ 0 & a^2 & -a^2 z_c \end{vmatrix} = -a^2 b^4 x_c (K^3)$$

Si noti l'analogia con le formule trovate per le coniche (Vol. II)

$$\boxed{x_c = \frac{-A_{41}}{A_{44}}}$$

$$\boxed{y_c = \frac{A_{42}}{A_{44}}}$$

$$\boxed{z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}}}$$

$$\boxed{K a^2 b^2 = (a_{44} - a_{11} x_c^2 - a_{22} y_c^2 - a_{33} z_c^2)} = \frac{a_{11} a_{33}}{K} = \frac{a_{22} a_{33}}{K}$$

$$\frac{a_{11} a_{33}}{(a_{44} - a_{11} x_c^2 - a_{22} y_c^2 - a_{33} z_c^2)} = \frac{(K b^2)(K a^2)}{K a^2 b^2} = K$$

$$\boxed{K = \frac{a_{11} a_{33}}{a_{44} - a_{11} x_c^2 - a_{22} y_c^2 - a_{33} z_c^2}}$$

$$\frac{\Delta}{(a_{11} a_{33})^2} = \frac{-K^4 a^4 b^6}{b^4 K^2 \cdot K^2 a^4} = -b^2 ; \quad \boxed{b^2 = \frac{-\Delta}{(a_{11} \cdot a_{33})^2}}$$

$$\frac{\Delta}{a_{33} A_{44}} = \frac{-K^4 a^4 b^6}{K a^2 K^3 a^2 b^4} = -b^2 ; \quad \boxed{b^2 = \frac{-\Delta}{a_{33} A_{44}}}$$

$$\frac{\Delta}{a_{11} A_{44}} = \frac{-K^4 a^4 b^6}{K b^2 K^3 a^2 b^4} = -a^2 ; \quad \boxed{a^2 = \frac{-\Delta}{a_{11} A_{44}}}$$

$$\frac{a_{11} a_{33} A_{44}}{\Delta} = \frac{b^2 K \cdot a^2 K \cdot a^2 b^4 K^3}{-K^4 a^4 b^2} = -K ; \quad \boxed{K = \frac{a_{11} a_{33} A_{44}}{-\Delta}}$$

queste formule sono valide per assi non ruotati

$$\boxed{\Delta = +a_{44} A_{44} - a_{34} A_{43} + a_{24} A_{42} - a_{14} A_{41}}$$

$$A_{44} = a_{33} A_{334} - a_{32} A_{324} + a_{31} A_{314} ;$$

$$-A_{43} = +a_{34} A_{343} - a_{32} A_{323} + a_{31} A_{313} ;$$

$$A_{42} = a_{34} A_{342} - a_{33} A_{332} + a_{31} A_{312} ;$$

$$-A_{41} = a_{34} A_{341} - a_{33} A_{331} + a_{32} A_{321} ;$$

Esempio Numerico

Studiare l'equazione:

$$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 8x - 32y + 59 = 0$$

mancano i coefficienti $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$, quindi il solido non è ruotato, è invece traslato, per cui calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -4 & -16 & 0 & 59 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{cases} 59(A_{44}) = 59(144) = 8496 \\ -0(A_{43}) = 0(0) = 0 \\ (-16)(A_{42}) = -16(-576) = 9216 \\ -4(A_{41}) = -4(144) = -576 \end{cases}$$
$$\Delta = -1296$$

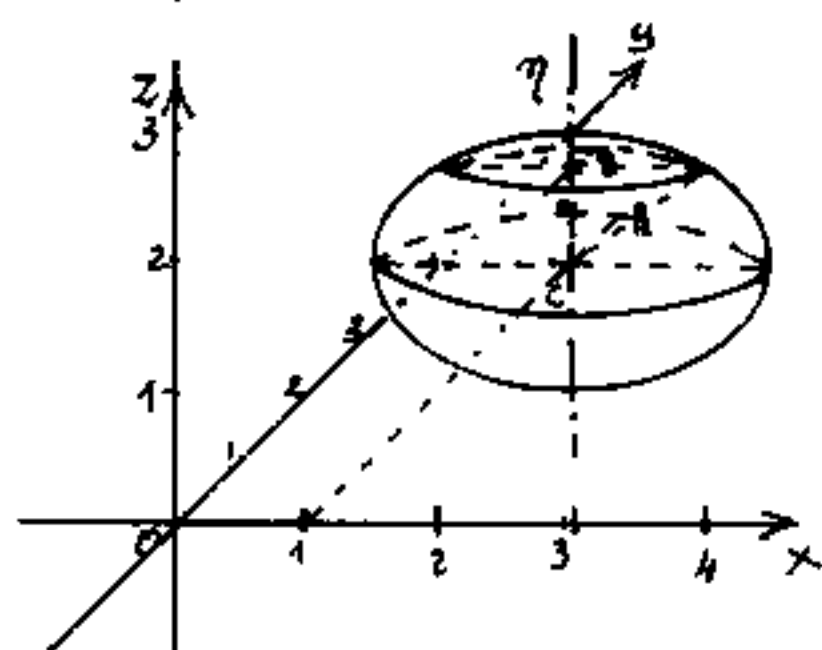
$$z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}} = \frac{0}{144} = 0; \quad y_c = \frac{-A_{42}}{A_{44}} = \frac{576}{144} = +4; \quad x_c = \frac{A_{41}}{A_{44}} = \frac{144}{144} = 1$$

$$C \equiv (1, 4, 0)$$

$$b^2 = \frac{-\Delta}{a_{33} A_{44}} = \frac{1296}{(9)(144)} = +1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$a^2 = \frac{-\Delta}{a_{11} A_{44}} = \frac{1296}{(4)(144)} = 2,25 \rightarrow \boxed{a = 1,5}$$

$$K = \frac{a_{11} a_{33} A_{44}}{-\Delta} = \frac{(4)(9)(144)}{1296} = 4 \rightarrow \boxed{K = 4}$$



Ponendo $z = 0$ otteniamo un cerchio; ponendo $x = 1$ otteniamo un'ellisse uguale a quella che si ha ponendo $y = 4$, (stesse semidiametri). Si deduce che il solido è un ellissoide di rotazione.

Ellissoide di rotazione

ad assi solo ruotati

In questo caso si tratta ancora di un solido al centro assi, però con asse di rotazione qualsiasi, diverso dagli assi di riferimento, ma passante per l'origine "O".

Questa retta ha per equazione:

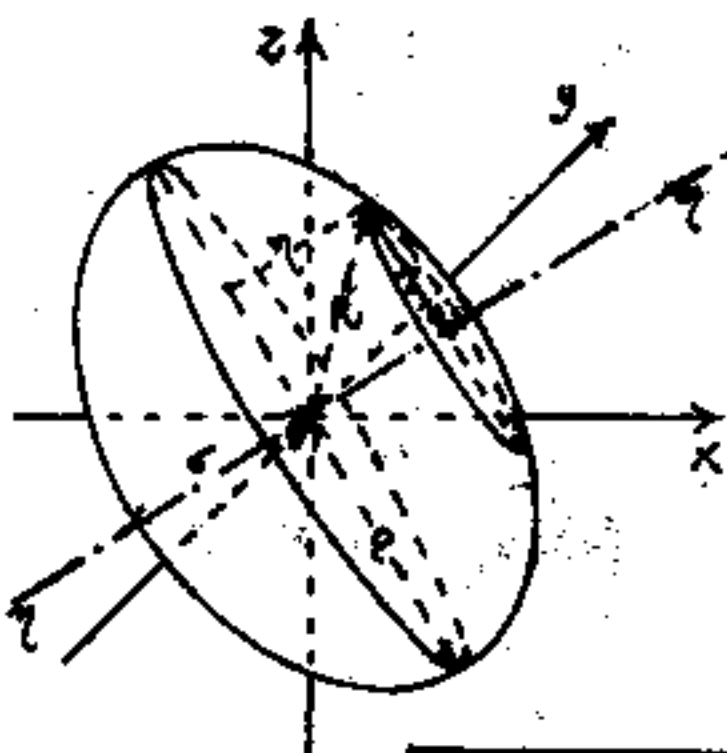
$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}$$

e su di essa, a partire da O, si riporta " η " per esprimere il raggio " c " delle circonferenze comuni ai piani:

$$(\cos \alpha)x + (\cos \beta)y + (\cos \gamma)z = \eta$$

ed alle sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = (c^2 + \eta^2) = (\eta^2 + f^2)$$



$$\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{\eta^2}{b^2} \Rightarrow c^2 = \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} \eta^2 \right)$$

$$R^2 = \eta^2 + \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} \eta^2 \right)$$

$$b^2 R^2 = a^2 b^2 - (a^2 - b^2) \eta^2$$

$$b^2 x^2 + b^2 y^2 + b^2 z^2 = a^2 b^2 - f^2 \eta^2$$

$$b^2 x^2 + b^2 y^2 + b^2 z^2 = a^2 b^2 - f^2 [(\cos \alpha)x + (\cos \beta)y + (\cos \gamma)z]^2$$

(ove " f " = distanza focale: $f^2 = (a^2 - b^2)$).

Notiamo che i coefficienti, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$; caratteristici della rotazione degli assi provengono dal quadrato dell'equazione del piano, poiché, (quando è possibile), è bene che questi coefficienti siano solo funzione di grandezze angolari, dividiamo l'equazione per f^2 e sviluppiamo il quadrato dell'equazione del piano; avremo:

$$\underbrace{\left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \alpha\right)}_{(a_{11})/K} x^2 + \underbrace{\left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \beta\right)}_{(a_{22})/K} y^2 + \underbrace{\left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \gamma\right)}_{(a_{33})/K} z^2 +$$

$$+ \underbrace{2(\cos \alpha \cos \beta)}_{2(a_{12})/K} xy + \underbrace{2(\cos \alpha \cos \gamma)}_{2(a_{13})/K} xz + \underbrace{2(\cos \beta \cos \gamma)}_{2(a_{23})/K} yz - \underbrace{\left(\frac{a^2 b^2}{f^2}\right)}_{(a_{44})/K} = 0$$

mancono i coefficienti di traslazione: $2(a_{14})$, $2(a_{24})$, $2(a_{34})$.

avremo:

$$\boxed{\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = K}$$

in fatti:

$$\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} = \frac{K^2 (\cos \alpha \cos \beta) (\cos \alpha \cos \gamma)}{K (\cos \beta \cos \gamma)} = K \cos^2 \alpha$$

$$\frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = \frac{K^2 (\cos \alpha \cos \beta) (\cos \beta \cos \gamma)}{K (\cos \alpha \cos \gamma)} = K \cos^2 \beta$$

$$\frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = \frac{K^2 (\cos \alpha \cos \gamma) (\cos \beta \cos \gamma)}{K (\cos \alpha \cos \beta)} = K \cos^2 \gamma$$

sommando: $K (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = K$.

Ed anche:

$$K = \frac{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}{(a_{12} a_{13} a_{23})}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{a_{12} a_{13}}{K a_{23}} = \frac{a_{12} a_{13} (a_{12} a_{13} a_{23})}{a_{13} [a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2]}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{a_{12}^2 a_{13}^2}{a_{13}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{a_{23}^2}{a_{13}^2} + \frac{a_{12}^2}{a_{13}^2} = \tan^2 \alpha + 1$$

$$\tan^2 \alpha = a_{12}^2 \left(\frac{1}{a_{13}^2} + \frac{1}{a_{12}^2} \right) = \frac{a_{12}^2}{a_{13}^2 a_{12}^2} (a_{13}^2 + a_{12}^2)$$

$$K \sin^2 \alpha = (a_{13}^2 + a_{12}^2)$$

$$\cos^2 \beta = \frac{a_{12}^2 a_{13}^2}{(a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2)}$$

$$\tan^2 \beta = a_{13}^2 \left(\frac{1}{a_{12}^2} + \frac{1}{a_{13}^2} \right)$$

$$K \sin^2 \beta = (a_{12}^2 + a_{13}^2)$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{a_{12}^2 a_{23}^2}{(a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2)}$$

$$\tan^2 \gamma = a_{12}^2 \left(\frac{1}{a_{13}^2} + \frac{1}{a_{23}^2} \right)$$

$$K \sin^2 \gamma = (a_{13}^2 + a_{23}^2)$$

Cerchiamo di capire il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta = \begin{cases} a_{44}(a_{33})A_{334} = a_{44}(a_{33})(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \\ a_{44}(-a_{33})A_{234} = a_{44}(-a_{33})(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{23}) = \\ a_{44}(a_{13})A_{134} = a_{44}(a_{13})(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = \end{cases} a_{44}A_{44}$$

$$A_{43} = 0 ; A_{42} = 0 ; A_{41} = 0 \quad (\text{non traslato})$$

$$A_{334} = \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \alpha \right) \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \beta \right) - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$$

$$= \frac{b^4}{f^4} + \frac{b^2}{f^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + \cancel{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - \cancel{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$\frac{b^4}{f^4} + \frac{b^2}{f^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = \boxed{\frac{A_{334}}{K^2} = \frac{b^4}{f^4} + \frac{b^2}{f^2} (1 - \cos^2 \gamma)}$$

$$A_{234} = \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \alpha \right) (\cos \beta \cos \gamma) - (\cos \alpha \cos \beta) (\cos \alpha \cos \gamma)$$

$$= \frac{b^2}{f^2} \cos \beta \cos \gamma + \cancel{\cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma} - \cancel{\cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

$$\boxed{\frac{A_{234}}{K^2} = \frac{b^2}{f^2} \cos \beta \cos \gamma}$$

$$A_{134} = (\cos \alpha \cos \beta) (\cos \beta \cos \gamma) - \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \beta \right) (\cos \alpha \cos \gamma)$$

$$A_{134} = \cancel{\cos^2 \beta \cos \alpha \cos \gamma} - \frac{b^2}{f^2} \cos \alpha \cos \gamma - \cancel{\cos^2 \beta \cos \alpha \cos \gamma}$$

$$\boxed{\frac{A_{134}}{K^2} = -\frac{b^2}{f^2} \cos \alpha \cos \gamma}$$

$$\frac{(a_{44}/K)(a_{23}/K)}{A_{234}/K^2} = \frac{a_{44} a_{23}}{A_{234}} = \frac{(a^2 b^2 / f^2)(\cos \beta \cos \gamma)}{(b^2 / f^2)(\cos \beta \cos \gamma)} = a^2$$

$$\boxed{a^2 = \frac{a_{44} a_{23}}{A_{234}}}$$

$$(a_{44}/K) = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

$$a^2(a_{44}/K) = (a^2 + a_{44}/K)b^2$$

$$b^2 = \frac{a^2(a_{44}/K)}{a^2 + a_{44}/K} = \frac{\frac{a_{44} a_{23}}{A_{234} K}}{\frac{a_{44} a_{23}}{A_{234}} + a_{44}/K} = \boxed{\frac{a_{44} a_{23}}{K a_{23} + A_{234}}} = b^2$$

$$a_{33} A_{334} = \frac{b^6}{f^6} + \frac{b^4}{f^4} + \frac{b^2}{f^2} \cos^2 \delta (1 - \cos^2 \delta)$$

$$-a_{23} A_{234} = -\frac{b^2}{f^2} \cos^2 \beta \cos^2 \delta$$

$$a_{13} A_{134} = -\frac{b^2}{f^2} \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma$$

$$\boxed{A_{44} = \frac{b^6}{f^6} + \frac{b^4}{f^4}} K^3$$

$$\Delta = a_{44} A_{44} = \frac{a^2 b^6}{f^6} \left(\frac{b^2}{f^2} + 1 \right) = \frac{a^2 b^6}{f^6} \left(\frac{b^2 + a^2 - b^2}{f^2} \right) \boxed{\Delta = \frac{a^4 b^6}{f^8}} K^4$$

Conviene dividere l'espressione per K anche prima di fare il determinante dei coefficienti

Esempio numerico

Studiate l'equazione:

$$1,16x^2 + 1,29y^2 + 0,95z^2 + 0,84xy + 0,464758xz + 0,5422176yz - 1,8 = 0$$

mancano i coefficienti $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$ perciò il solido non è traslato, e' invece con asse ruotato.

$$K \cos^2 \alpha = \frac{a_{12} a_{23}}{a_{33}} = \frac{(0,42)(0,232379)}{(0,27110883)} = 0,36$$

$$K \cos^2 \beta = \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = \frac{(0,42)(0,27110883)}{(0,232379)} = 0,49$$

$$K \cos^2 \gamma = \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = \frac{(0,232379)(0,27110883)}{0,42} = 0,15$$

$$K = 1$$

$$\boxed{\cos^2 \alpha = 0,36} ; \quad \boxed{\cos^2 \beta = 0,49} ; \quad \boxed{\cos^2 \gamma = 0,15}$$

ponendo $z = 0$

$$A_{334} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = (1,16)(1,29) - 0,84 = +0,7908 > 0$$

ci dà l'equazione di un'ellisse perciò riteniamo un ellissoide di rotazione.

$$-A_{234} = (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) = (1,16)(0,27110883) - (0,42)(0,232379) =$$

$$\boxed{+A_{234} = +0,216887063}$$

$$a^2 = \frac{(a_{44})(a_{33})}{A_{234}} = \frac{(+1,8)(0,27110883)}{+0,216887063} = 2,25 \rightarrow \boxed{a = 1,5}$$

$$b^2 = \frac{a_{44} a_{13}}{K a_{23} + A_{234}} = \frac{(1,8)(0,27110883)}{(1)(0,27110883 + 0,216887063)} = 1,00 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

I calcoli effettuati ci permettono di affermare:
 ($K=1$) l'asse del solido è una retta passante per
 l'origine degli assi, la cui equazione è:

$$\frac{x}{0,6} = \frac{y}{0,7} = \frac{z}{\sqrt{0,15}}$$

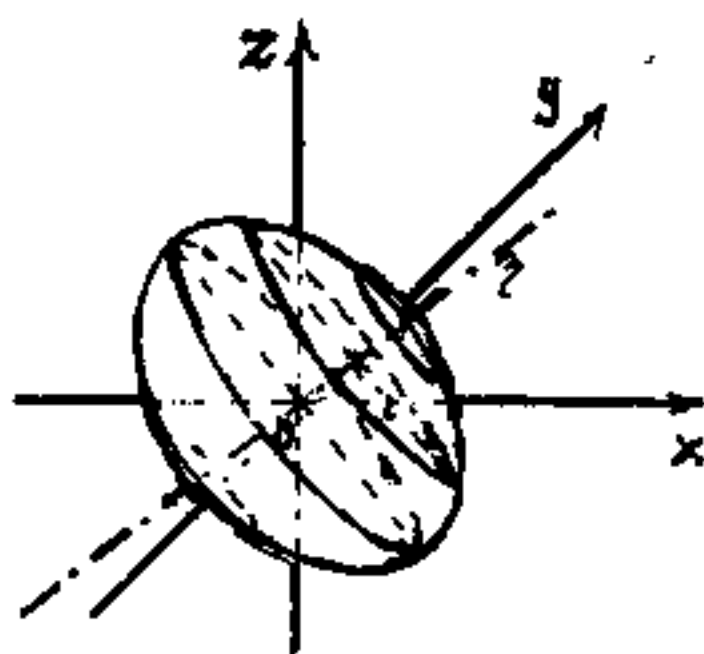
ed è retta di giacitura dei piani:

$$(0,6)x + (0,7)y + (\sqrt{0,15})z = \eta$$

ove η è la distanza dall'origine di tali piani.
 essendo nulle le coordinate di "C" (traslazione nulla) il
 centro "O" è anche centro del solido.

Poiché: $f^2 = (a^2 - b^2) = (2,25 - 1) = 1,25$

Poiché: $\frac{a_{11}}{K} = \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \alpha \right)$; (b^2 = quadrato del semiasse che giace
 sull'asse di rotazione η); $b^2 = \left(\frac{a_{11}}{K} - \cos^2 \alpha \right) f^2 = \left(\frac{1,16}{1} - 0,36 \right) (1,25)$
 $b^2 = 1$ ed essendo $a > b$, l'asse focale è quello che
 ruota intorno ad η mantenendosi sui piani di giacitura.
 Ora possiamo fare il disegno prospettico:



per $z=0$; assi: (1,5; 1,04); $\varphi = 139^\circ 23' 55''$

per: $y=0$; assi: (1,5; 1,112); $\varphi = 122^\circ 50' 31''$

per $x=0$; assi: (1,3; 1,118); $\varphi = 118^\circ 57' 18''$

Si è cercato approssimativa-
 mente "a vista" di dare la
 sensazione della rotazione.

scala approssimata: in $x = (1:1)$; in $z = (1:1)$; in $y = (1:\sqrt{2})$

Ellissoide di rotazione ad assi ruotati e traslati

Trasliamo gli assi nella precedente formula dell'ellissoide ad assi solo ruotati, cioè sostituiamo ad x, y, z le espressioni $(x-x_c); (y-y_c); (z-z_c)$; avremo:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \alpha \right) x^2 + \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \beta \right) y^2 + \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2 \gamma \right) z^2 + \\ & \quad \left(\frac{a_{11}}{K} \right) \quad \left(\frac{a_{22}}{K} \right) \quad \left(\frac{a_{33}}{K} \right) \\ & + 2(\cos \alpha \cos \beta) xy + 2(\cos \alpha \cos \gamma) xz + 2(\cos \beta \cos \gamma) yz + \\ & \quad \left(\frac{2a_{12}}{K} \right) \quad \left(\frac{2a_{13}}{K} \right) \quad \left(\frac{2a_{23}}{K} \right) \\ & - 2 \left(a_{11} x_c + a_{12} y_c + a_{13} z_c \right) x + \\ & \quad \left(\frac{2a_{11}}{K} \right) \\ & - 2 \left(a_{12} y_c + a_{13} x_c + a_{23} z_c \right) y + \\ & \quad \left(\frac{2a_{12}}{K} \right) \\ & - 2 \left(a_{13} z_c + a_{13} x_c + a_{23} y_c \right) z + \\ & \quad \left(\frac{2a_{13}}{K} \right) \\ & \left[a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + a_{33} z_c^2 + 2a_{12} x_c y_c + 2a_{13} x_c z_c + 2a_{23} y_c z_c - \frac{a^2 b^2}{f^2} \right] \\ & \quad \left(\frac{a_{44}}{K} \right) \end{aligned}$$

Le prime due terne di coefficienti sono identiche a quelle dell'equazione ad assi solo ruotati, perciò dalla secondaterna è possibile calcolare: $K, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

La terzaterna di coefficienti è identica a

quella dell'equazione ad assi solo traslati perciò da esso è possibile calcolare; x_e, y_e, z_e ; dopo di che si possono calcolare i semidiametri "a" e "b", riducendoci all'equazione dell'ellissoide ad assi solo ruotati.

Esempio numerico

studiare l'equazione:

$$\left[\begin{aligned} & \underbrace{(4,64)}_{(a_{11})} x^2 + \underbrace{(5,16)}_{(a_{22})} y^2 + \underbrace{(3,8)}_{(a_{33})} z^2 + \underbrace{(3,36)}_{2(a_{12})} xy + \underbrace{(1,859032)}_{2(a_{13})} xz + \underbrace{(2,16887068)}_{2(a_{23})} yz + \\ & \underbrace{-(22,72)}_{(2a_{14})} x - \underbrace{(44,64)}_{2(a_{24})} y - \underbrace{(10,53451472)}_{2(a_{34})} z + \underbrace{93,44}_{(a_{44})} = 0 \end{aligned} \right]$$

Polinomio completo di 2° grado in tre variabili,

Ponendo $z = 0$ si ha una conica:

$$(4,64)x^2 + (5,16)y^2 + (3,36)xy - (22,72)x - (44,64)y + 93,44 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4,64 & 1,68 & -11,36 \\ 1,68 & 5,16 & -22,32 \\ -11,36 & -22,32 & +93,44 \end{vmatrix} = A \begin{cases} 93,44(21,12) = 1973,4528 \\ +22,32(-84,48) = -1885,5936 \\ -11,36(21,12) = -239,9232 \end{cases}$$

$$A = -152,064$$

$A \neq 0$ conica non degenera.

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} > 0 \quad \& \quad A \cdot a_{11} < 0 \quad A a_{22} < 0 \rightarrow \text{elliptic case.}$$

$$-\frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{84.48}{21.12} = y_{\text{centro alline}} = 4 \quad ; \quad \frac{+A_{13}}{A_{33}} = \frac{x_{\text{centro alline}}}{21.12} = \frac{21.12}{21.12} = 1$$

$$K_{1,2}^2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{152,064}{21,12} = 7,2$$

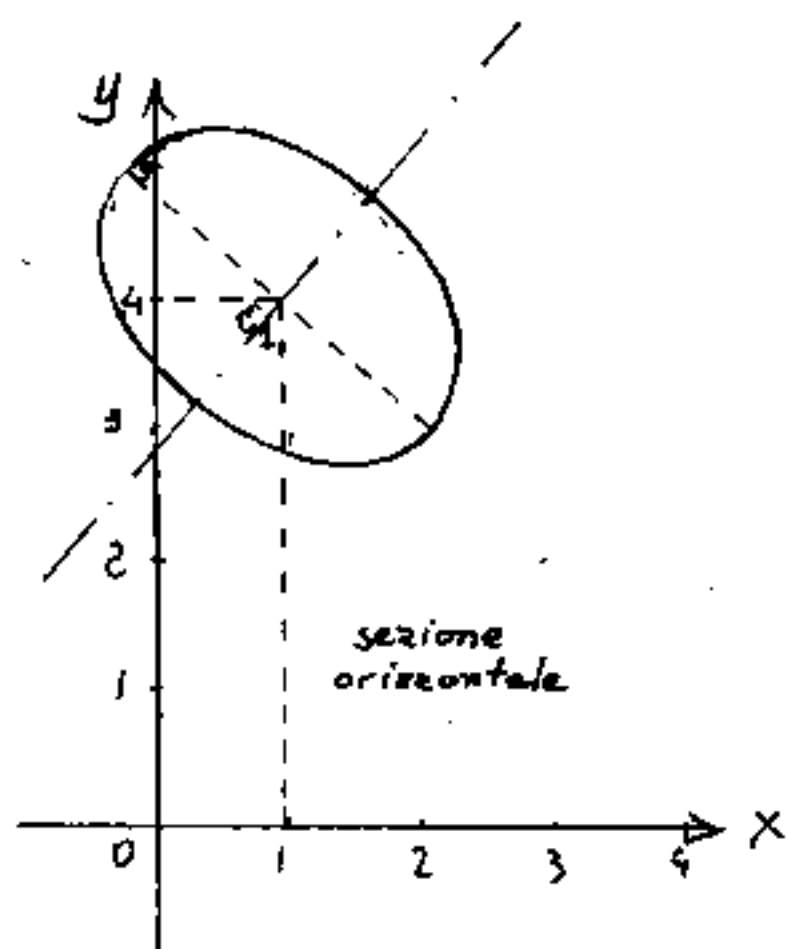
$$K_{1,2}^2 = [(4,44) + (82,56) + (13,44) - (93,44)] = 7,20 \quad (\text{verifica})$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \backslash \\ \lambda_2^2 &= / \end{aligned} = \frac{2(K_{1,2}^2)}{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}} = \frac{2(7,2)}{9,80 \pm \sqrt{(-0,52)^2 + (3,36)^2}}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \backslash = \frac{14,4}{9,80 + 3,4} = / 1,090909 \rightarrow b = 1,04446 \\ \lambda_2^2 &= / = \frac{14,4}{9,80 - 3,4} = \backslash 2,25 \rightarrow a = 1,50 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{3,36}{(-0,52)}\right) = 139^\circ 23' 55''$$

$$\text{asse: } (49^\circ 23' 55'')$$



Quindi la figura a fianco è la intersezione del nostro solido col piano $z=0$

Qualora il nostro solido non tagliasse il piano $z=0$, perché più alto o più basso la nostra

equazione ci avrebbe portato a definire: "immaginaria" cioè non vuol dire che il solido non esiste, si deve annullare su altro piano: $x=0$ oppure $y=0$. Però consideriamo un momento la figura; si nota che se trattasi di ellissoidi, a meno che il terzo diametro non sia molto grande, il piano $y=0$ non taglia il solido; quindi

possiamo scegliere il piano $y=4$, oppure $x=1$, e saremo sicuri di avere un piano che passa per C_1 .

Scegliamo: $\boxed{x=1}$, avremo:

$$(4,64) + (5,16)y^2 + (3,8)z^2 + (3,36)y + (1,859032)z + (2,16887068)yz + \\ - (22,72) - (44,64)y - (10,53451472)z + 93,44 = 0$$

ordinando:

$$\left[\begin{array}{l} (5,16)y^2 + (3,8)z^2 + (2,16887068)xy - (41,28)y - (8,67548272)z + 75,36 = 0 \\ \quad + 2(1,08443534) \quad \quad 2(20,64) \quad - 2(4,33774136) \end{array} \right]$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5,16 & 1,08443534 & -20,64 & 75,36(18,432) = +1389,035519 \\ 1,08443534 & 3,8 & -4,33774136 & 4,33774136(0) = 0, 0 \\ -20,64 & -4,33774136 & 75,36 & -20,64(73,728) = -1521,745919 \end{array} \right| A = -132,7104$$

$A \neq 0$ conica non degenera

$A_{33} = 18,432 > 0$ = caso ellittico; $a_{11}A < 0 \Rightarrow a_{22}A < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ellisse} \\ \text{reale} \end{array} \right.$

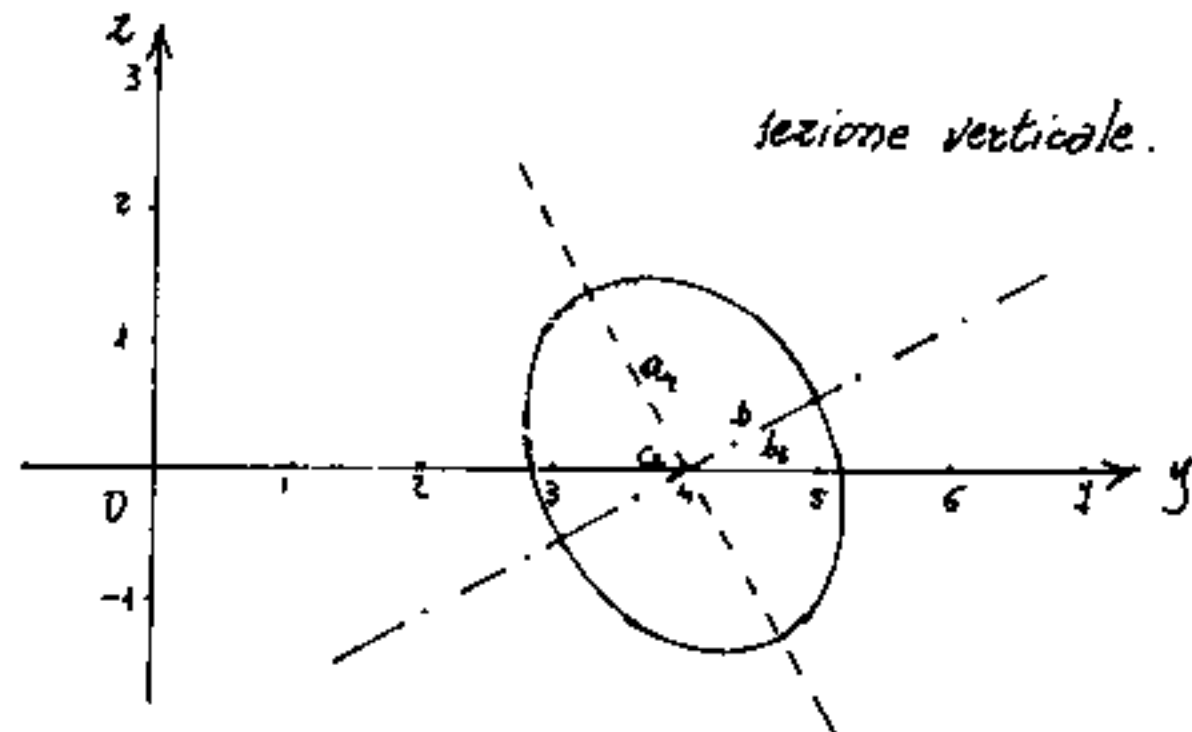
$$\frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{0}{18,432} = 0 = \underbrace{z_c}_{\text{centro ellisse}}; \quad \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{73,728}{18,432} = 4 = \underbrace{y_c}_{\text{centro ellisse}}$$

$$k_1 k_2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{132,7104}{18,432} = 7,2 \quad , \quad \frac{j_1^2}{j_2^2} = \frac{2 \cdot 7,2}{8,96 + \sqrt{(1,36)^2 + (2,16887068)^2}}$$

$$\frac{j_1^2}{j_2^2} = \frac{14,4}{8,96 + 2,56} = \begin{array}{l} 2,25 \Rightarrow \\ 1,25 \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} a = 1,5 \\ b = 1,118034 \end{array}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2,16887068}{(1,36)}\right) = 118^\circ 57' 18''$$

ang. $(28^\circ 57' 18'')$



I due disegni ci consentono di affermare che il solido è un ellissoide di rotazione in quanto il semiasse maggiore $a=1,5$ rimane costante.

Consideriamo ora il determinante del polinomio

$$\begin{vmatrix} 4,64 & 1,68 & 0,929516 & -11,36 \\ 1,68 & 5,16 & 1,08443534 & -22,32 \\ 0,929516 & 1,08443534 & 3,8 & -5,26725736 \\ -11,36 & -22,32 & -5,26725736 & 93,44 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = \begin{cases} 93,44 & \begin{cases} 3,8 \cdot (21,12) = 80,256 \\ -1,08443534(3,4701931) = -3,76220 \\ 0,929516(-2,9744512) = -2,764789 \end{cases} \quad (A_{44} = 73,728) a_{44} = 6889,14432 \\ -5,26725736 & \begin{cases} -5,26725736(21,12) = -111,24475 \\ -1,08443534(-84,48) = 91,613098 \\ 0,929516(21,12) = 19,531378 \end{cases} \quad (A_{43} = 0) a_{43} = 0 \\ -22,32 & \begin{cases} -5,26725736(3,4701931) = -18,2784 \\ -3,8(-84,48) = 321,024 \\ 0,929516(-8,4276117) = -7,8335999 \end{cases} \quad (A_{42} = 294,912) a_{42} = -6582,13584 \\ -11,36 & \begin{cases} -5,26725736(-2,9744512) = 15,6672 \\ -3,8(21,12) = -80,256 \\ 1,08443534(-8,4276117) = -9,1392 \end{cases} \quad (A_{41} = -73,728) a_{41} = -837,55008 \end{cases}$$

$$\Delta = -530,8416$$

Sappiamo che:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{-A_{41}}{A_{44}} = \frac{73,728}{73,728} = 1 \\ y_c &= \frac{A_{42}}{A_{44}} = \frac{294,912}{73,728} = 4 \\ z_c &= \frac{A_{43}}{A_{44}} = \frac{0}{73,728} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{valori che avevamo già} \\ \text{visto con la sezione} \\ \text{del solido col piano } z=0. \end{array}$$

Dal solido solo ruotato:

$$\frac{a_{12} a_{13}}{a_{13}} = K \cos^2 \alpha = \frac{1,68 \cdot 0,929516}{1,08443534} = 1,44$$

$$\frac{a_{12} a_{13}}{a_{13}} = K \cos^2 \beta = \frac{1,68 \cdot 1,08443534}{0,929516} = 1,96$$

$$\frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = K \cos^2 \gamma = \frac{0,929516 \cdot 1,08443534}{1,68} = 0,6$$

$$K = 4, =$$

$$\cos^2 \alpha = 1,44/4 = 0,36 ; \cos \alpha = 0,6 ; \alpha = 53^\circ 07' 48''$$

$$\cos^2 \beta = 1,96/4 = 0,49 ; \cos \beta = 0,7 ; \beta = 45^\circ 34' 23''$$

$$\cos^2 \gamma = 0,6/4 = 0,15 ; \cos \gamma = 0,3872983 ; \gamma = 67^\circ 12' 48''$$

$$\begin{aligned} K \frac{a^2 b^2}{f^2} &= (-A_{44} + a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + a_{33} z_c^2 + 2a_{12} x_c y_c + 2a_{13} x_c z_c + 2a_{23} y_c z_c) \\ &= 4,44 + (5,16) \cdot 16 + (3,36) \cdot 4 - 93,44 = 7,20 = 4(1,80) ; \frac{a^2 b^2}{f^2} = 1,80 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a_{11}}{K} - \cos^2 \alpha \right) = \frac{b^2}{f^2} = \frac{4,64}{4} - 0,36 = 0,8 ; \frac{b^2}{f^2} = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{a^2 b^2}{f^2} \right) \left(\frac{f^2}{b^2} \right) = \frac{1,80}{0,8} = 2,25 \quad \boxed{a^2 = 2,25} \quad \boxed{a = 1,50}$$

$$\frac{b^2}{a^2 - 1} = 0,8 ; b^2 = 0,8 a^2 - 0,8 b^2 \rightarrow b^2(4,80) = 1,80 \quad \boxed{b^2 = 1} \quad \boxed{b = 1}$$

Ellissoide

L'ellissoide (semplice), non è un solido di rotazione, infatti, mentre nell'ellissoide di rotazione si hanno solo due assi di ellisse di cui uno è asse di rotazione, nell'ellissoide, propriamente detto, si hanno tre diametri ortogonali, i cui semidiametri a, b, c , spesso rispondono alla doppia disuguaglianza $a > b > c$, perciò "a" è asse focale e contiene due fuochi: $f_1^2 = (a^2 - b^2)$ e $f_2^2 = (a^2 - c^2)$. È un solido importantissimo, avremo occasione di trattare l'ellissoide d'inerzia, l'ellissoide delle tensioni, l'ellissoide ottico di Fresnel, ed anche l'ellissoide terrestre come configurazione di equilibrio di un fluido rotante; e l'ellissoide di rotazione diventa un caso particolare di ellissoide con due semiassi uguali.

Ellissoide al centro assi

La formula:

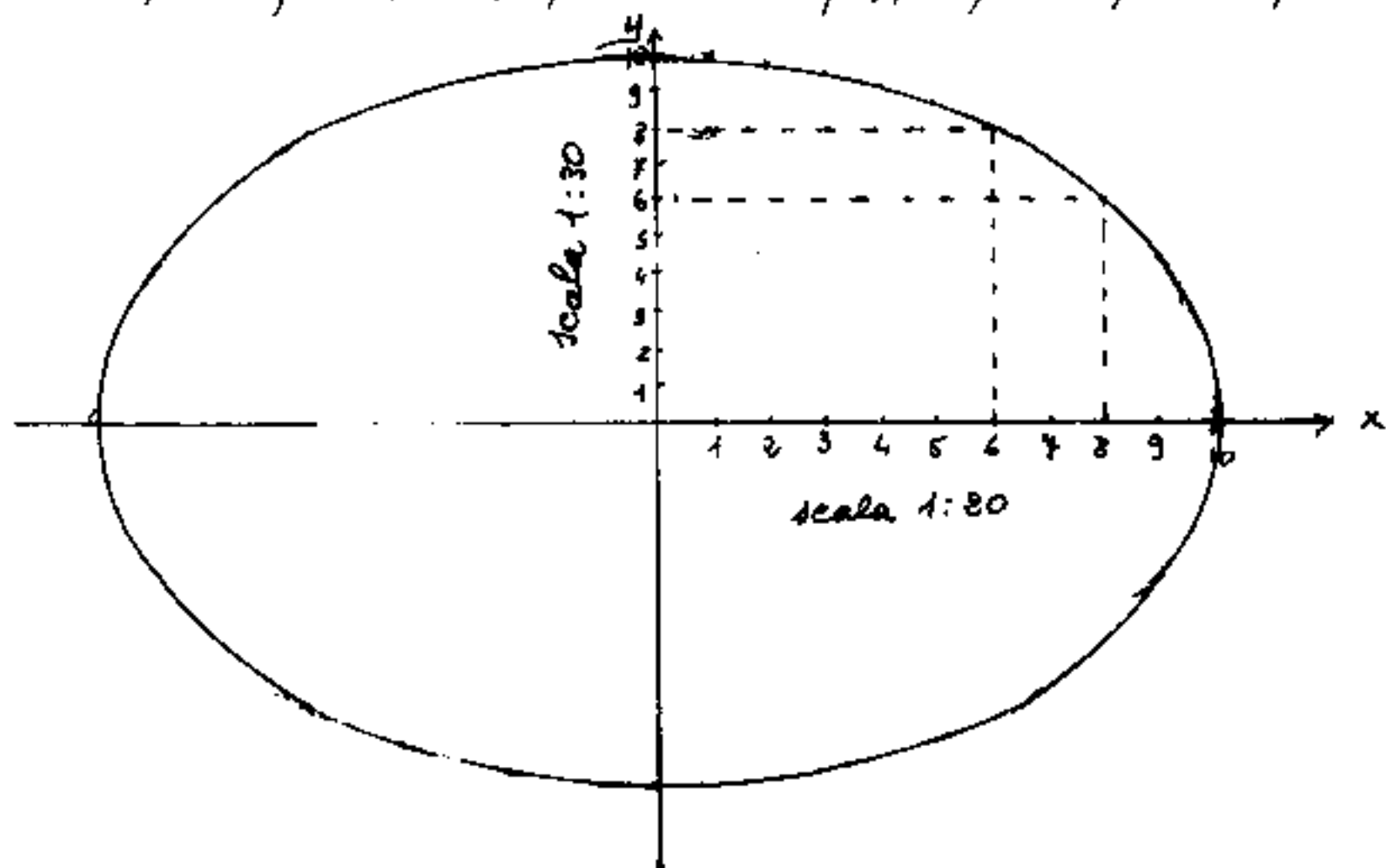
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ci mostra l'ellissoide come una superficie derivata dalla superficie sferica, ove gli assi x, y, z siano graduati in scale diverse.

Lo stesso discorso, nel piano, vale fra ellipse e cerchio. Supponiamo infatti di graduare le axis in scala 1:20; e le ordinate in scala 1:30 e sia 1 nelle rispettive scale il raggio. Prepariamo la tabella delle coordinate del cerchio:

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$y = 9,95, 9,80, 9,54, 9,17, 8,66, 8, 7,14, 6, 4,36, 0$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

per $R=100\text{ cm}$: a (scala 1:20) = 5 cm ; b (scala 1:30) = 3,33

in cm. In opportuna scala possiamo scrivere: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

Si tenga presente che la proiezione "di scorcio"

per un segmento è semplicemente lo stesso segmento in altra scala. (Nel senso generale di proiezioni centrali od ortogonali.)

Ellissoide ad assi traslati

Scriviamo l'equazione al centro nella forma:

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 - a^2 b^2 c^2 = 0$$

ad assi traslati:

$$\left[\underbrace{(b^2 c^2)}_{(a_{11}/K)} x^2 + \underbrace{(a^2 c^2)}_{(a_{22}/K)} y^2 + \underbrace{(a^2 b^2)}_{(a_{33}/K)} z^2 + \underbrace{2(b^2 c^2 x_c)}_{(2a_{14}/K)} x - \underbrace{2(a^2 c^2 y_c)}_{(2a_{24}/K)} y - \underbrace{2(a^2 b^2 z_c)}_{(2a_{34}/K)} z + \underbrace{(a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + a_{33} z_c^2 - a^2 b^2 c^2)}_{(a_{44}/K)} \right] = 0$$

mancano i coefficienti $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$, non essendo ruotati gli assi.

$$A_{44} = \begin{vmatrix} b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 b^2 \end{vmatrix} = K^3 (a^4 b^4 c^4)$$

$$A_{43} = \begin{vmatrix} b^2 c^2 & 0 & -b^2 c^2 x_c \\ 0 & a^2 c^2 & -a^2 c^2 y_c \\ 0 & 0 & -a^2 b^2 z_c \end{vmatrix} = K^3 (a^4 b^4 c^4 z_c) \Rightarrow \boxed{z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}}} = \frac{K^3 a^4 b^4 c^4 z_c}{K^3 a^4 b^4 c^4}$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} b^2 c^2 & 0 & -b^2 c^2 x_c \\ 0 & 0 & -a^2 c^2 y_c \\ 0 & a^2 b^2 & -a^2 b^2 z_c \end{vmatrix} = {}^{(-1)} K^3 (a^4 b^4 c^4 y_c) \Rightarrow \boxed{y_c = \frac{+A_{42}}{A_{44}}}$$

$$A_{41} = \begin{vmatrix} b^2 c^2 & 0 & -b^2 c^2 x_c \\ a^2 c^2 & 0 & -a^2 c^2 y_c \\ 0 & a^2 b^2 & -a^2 b^2 z_c \end{vmatrix} = -K^3 (a^4 b^4 c^4 x_c) \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{-A_{41}}{A_{44}}}$$

avremo anche:

$$-K(a^2 b^2 c^2) = \boxed{a_{44} - \frac{a_{23} A_{43} + a_{21} A_{42} - a_{11}}{A_{44}}}$$

$$\boxed{a^2 = \frac{K(a^2 b^2 c^2)}{a_{11}}}$$

$$\boxed{b^2 = \frac{K(a^2 b^2 c^2)}{a_{22}}}$$

$$\boxed{c^2 = \frac{K(a^2 b^2 c^2)}{a_{33}}}$$

Esempio numerico: studiare l'equazione:

$$\boxed{9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 54x - 128y - 360z + 1201 = 0}$$

$-2(27) \quad -2(64) \quad -2(180)$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = 5184$$

$$A_{43} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -27 \\ 0 & 16 & -64 \\ 0 & 0 & -180 \end{vmatrix} = +25920$$

$$z_c = \frac{25920}{5184} = 5$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -64 \\ 0 & 36 & -180 \end{vmatrix} = 20736$$

$$y_c = \frac{20736}{5184} = 4$$

$$A_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -27 \\ 16 & 0 & -64 \\ 0 & 36 & -180 \end{vmatrix} = -15552$$

$$x_c = \frac{+15552}{5184} = 3$$

$$\boxed{C_c = 3, 4, 5}$$

$$-K a^2 b^2 c^2 = 1201 - 9 \cdot 3^2 - 16 \cdot 4^2 - 36 \cdot 5^2 = -36$$

$$a^2 = \frac{36}{9} = 4$$

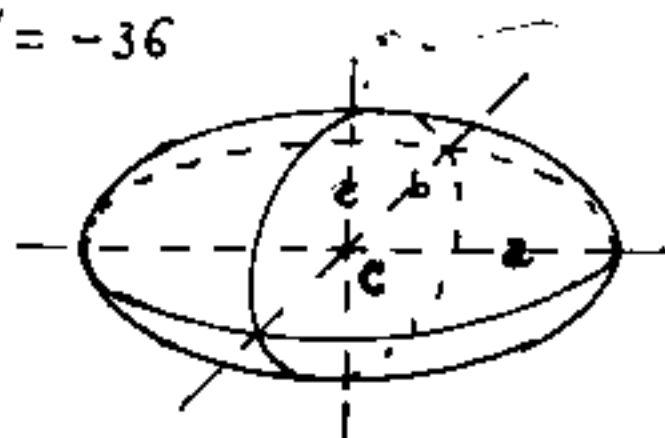
$$\boxed{a = 2}$$

$$b^2 = \frac{36}{16} = 2,25$$

$$\boxed{b = 1,5}$$

$$c^2 = \frac{36}{36} = 1$$

$$\boxed{c = 1}$$



La rotazione di solidi nello spazio

Un solido di rotazione, in quanto possiede un asse di rotazione, può essere definito in base ai coseni direttori dell'asse di rotazione. Ma, un corpo solido che non disponga di un asse privilegiato che ruota di un angolo φ intorno ad un asse di rotazione, non solo necessita dei coseni direttori di tale asse, ma, occorre sia noto anche l'angolo φ . Inveramente ciò vale per un sistema di tre assi "ruotati". Infatti detta x_1 la nuova posizione di x definita dai coseni direttori rispetto agli assi x, y, z ; non resta affatto definita la posizione di y_1 e z_1 che possono ruotare intorno ad x_1 .

In linea del tutto generale, ed analogamente a quanto abbiamo fatto per la rotazione di assi nel piano, ricerchiamo le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto ad assi ruotati in funzione delle coordinate originarie x, y, z ; e viceversa.

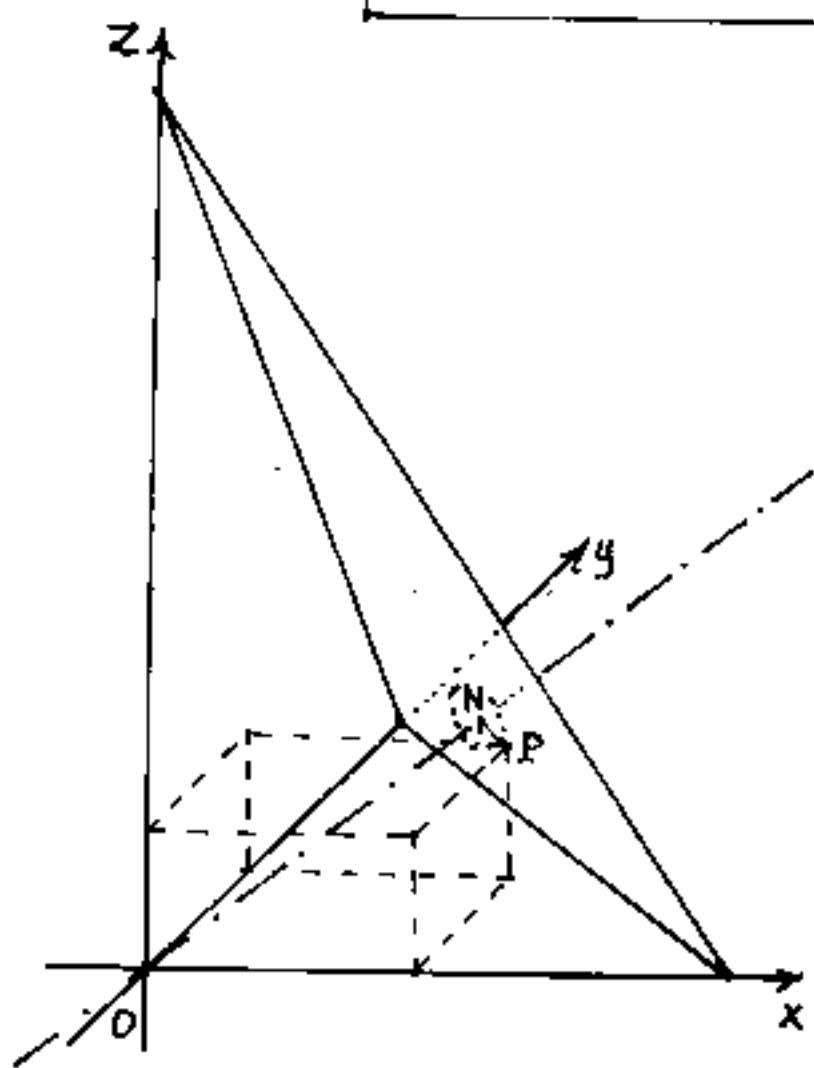
A tal fine consideriamo un asse di rotazione passante per l'origine degli assi; definita da:

$$\boxed{\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}}$$

Ciascun punto dello spazio tridimensionale manterrà invariata la sua distanza dall'asse di rotazione, e poiché le coordinate di un punto, sono le distanze misurate sugli assi di riferimento, i punti sull'asse di rotazione, mantengono invariate le loro coordinate qualunque sia l'angolo φ di rotazione degli assi.

Sia P un punto dello spazio: $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$, facciamo passare per P un piano normale all'asse di rotazione, avremo:

$$\cos \alpha (x - x_p) + \cos \beta (y - y_p) + \cos \gamma (z - z_p) = 0$$



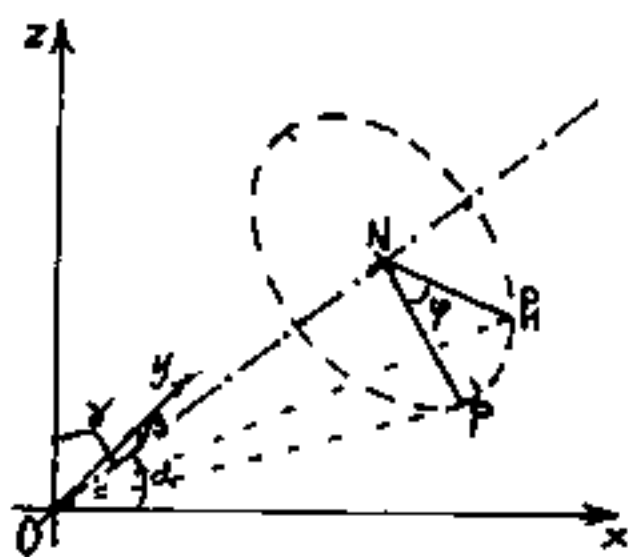
La distanza del piano dall'origine "O", sarà il segmento $\overline{ON}$, sull'asse di rotazione (normale) ove:

$$\overline{ON} = \cos \alpha x_p + \cos \beta y_p + \cos \gamma z_p$$

Nella rotazione il punto P descriverà una circonferenza di raggio $r = \overline{PN}$, che

è l'intersezione della sfera di raggio: $\overline{OP} = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$ cioè: $x^2 + y^2 + z^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2$ col piano di cui sopra.

Occorre fare attenzione al verso di rotazione di $\overline{NP}$ per andare in $\overline{NP}_1$ compien-



do l'angolo φ , orario, od antiorario rispetto all'asse di rotazione orientato. (vedi vol. II).

In figura, se l'orientamento dell'asse è $\overrightarrow{ON}$ il verso è antiorario, (come la terna x, y, z)

Note le coordinate di $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$; $\overline{OP}^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2$

$$\cos(\hat{xOP}) = \frac{x_p}{\overline{OP}}; \quad \cos(\hat{yOP}) = \frac{y_p}{\overline{OP}}; \quad \cos(\hat{zOP}) = \frac{z_p}{\overline{OP}}$$

Sono i coseni direttori di $\overrightarrow{OP}$.

$$\overline{OP}^2 = \overline{OP}_1^2; \quad \overline{NP}^2 = \overline{NP}_1^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2$$

la retta:
$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} \right) \\ \left(\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{z}{\cos \gamma} \right) \end{aligned} \right\} \text{ (asse di rotazione)}$$

ed il piano:

$$\{(\cos \alpha)x + (\cos \beta)y + (\cos \gamma)z = \overline{ON} \} \text{ (piano di } \varphi)$$

$$x_N = (\cos \alpha) \overline{ON}; \quad y_N = (\cos \beta) \overline{ON}; \quad z_N = (\cos \gamma) \overline{ON}$$

$$\overline{PP}_1 = 2 \overline{NP} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{(x_p - x_{p_1})^2 + (y_p - y_{p_1})^2 + (z_p - z_{p_1})^2}$$

essendo: $2(1 - \cos \varphi) = \left(2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) 2$ avremo:

$$(x_p - x_{p_1})^2 + (y_p - y_{p_1})^2 + (z_p - z_{p_1})^2 = 2(1 - \cos \varphi) \overline{NP}^2$$

ore sono incognite le tre coordinate di P_1 .

$$X_p^2 + X_p^2 - 2X_p X_{p_1} + y_p^2 + y_p^2 - 2y_p y_{p_1} + z_p^2 + z_p^2 - 2z_p z_{p_1} = 2(1 - \cos \varphi) \overline{NP}^2$$

essendo: $X_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = X_{p_1}^2 + y_{p_1}^2 + z_{p_1}^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OP_1}^2$

$$2\overline{OP}^2 - 2X_p X_{p_1} - 2y_p y_{p_1} - 2z_p z_{p_1} = 2(1 - \cos \varphi) \overline{NP}^2$$

$$\overline{OP}^2 - \overline{NP}^2 + \cos \varphi \overline{NP}^2 = X_p X_{p_1} + y_p y_{p_1} + z_p z_{p_1}$$

I. equaz. $(X_p) X_{p_1} + (y_p) y_{p_1} + (z_p) z_{p_1} = \overline{ON}^2 + \cos \varphi \overline{NP}^2$

II equaz. $(\cos \alpha) X_{p_1} + (\cos \beta) y_{p_1} + (\cos \gamma) z_{p_1} = \overline{ON}$

III equaz $X_{p_1}^2 + y_{p_1}^2 + z_{p_1}^2 = \overline{OP}^2$

ricaviamo (z_{p_1}) dalla II^a equaz.

$$z_{p_1} = \frac{\overline{ON}}{\cos \gamma} - \frac{X_p \cos \alpha}{\cos \gamma} - \frac{y_p \cos \beta}{\cos \gamma}$$

$$z_{p_1}^2 = \left(\overline{ON}^2 + X_p^2 \cos^2 \alpha + y_p^2 \cos^2 \beta - 2\overline{ON} X_p \cos \alpha - 2\overline{ON} y_p \cos \beta + X_p y_p \cos \alpha \cos \beta \right) \frac{1}{\cos^2 \gamma}$$

sostituendo i valori nella I e III equaz.

$$\left(X_p - z_{p_1} \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right) X_{p_1} + \left(y_p - z_{p_1} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) y_{p_1} = \overline{ON}^2 - \frac{z_{p_1} \overline{ON}}{\cos \gamma} + \cos \varphi \overline{NP}^2$$

$$\left(X_p - \overline{OP} \cos \alpha \right) X_{p_1} + \left(y_p - \overline{OP} \cos \beta \right) y_{p_1} = \overline{ON}^2 - (\overline{OP} \overline{ON}) + \cos \varphi \overline{NP}^2$$

$$\left[\left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma} \right) X_{p_1}^2 + \left(1 + \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \gamma} \right) y_{p_1}^2 + \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos^2 \gamma} \right) X_{p_1} y_{p_1} - (2\overline{ON} \cos \alpha) X_{p_1} - (2\overline{ON} \cos \beta) y_{p_1} = \overline{ON}^2 - \overline{OP} \overline{ON} + \cos \varphi \overline{NP}^2 \right]$$

Ricaviamo: $y_{p_1} = \frac{\overline{ON}^2 - \overline{OP} \overline{ON} + \cos \varphi \overline{NP}^2 - (X_p + \overline{OP} \cos \alpha) X_{p_1}}{(y_p - \overline{OP} \cos \beta)}$

che sostituito nella seconda equazione ci da una equazione di secondo grado in (X_{p_1}) piuttosto complicata, per cui preferiamo un esempio numerico.

Esempio numerico

Sia: $P \equiv (5; 5; 2,5)$; sia: $\cos \alpha = 0,5$; $\cos \beta = 0,292418237$;
 $\cos \gamma = 0,815163526$; trovare le coordinate di $P \rightarrow P_1$
dopo una rotazione di $30^\circ = \varphi$ intorno all'asse di cui
sono dati i coseni direttori.

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 56,25 \rightarrow \overline{OP} = 7,50$$

$$\overline{ON} = 5 \cos \alpha + 5 \cos \beta + 2,5 \cos \gamma = 2,5 + 1,462091185 + 2,037908815 = 6$$

$$\overline{ON}^2 = 36; \quad \overline{PN}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2 = 56,25 - 36 = 20,25 \quad \text{da cui}$$

$$\overline{PN} = 4,5; \quad \cos \varphi = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866025404.$$

$$\overline{ON}^2 + \cos \varphi \overline{NP}^2 = 36 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 20,25 = 53,53701443.$$

possiamo ora scrivere le tre equazioni

$$\begin{cases} 5x_{P_1} + 5y_{P_1} + 2,5z_{P_1} = 53,53701443 \\ 0,5x_{P_1} + 0,292418237y_{P_1} + 0,815163526z_{P_1} = 6 \\ x_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 + z_{P_1}^2 = 56,25 \end{cases}$$

$$z_{P_1} = 21,41480577 - 2x_{P_1} - 2y_{P_1}$$

$$z_{P_1}^2 = 458,5939062 + 4x_{P_1}^2 + 4y_{P_1}^2 - 85,6592231x_{P_1} - 85,6592231y_{P_1} + 8x_{P_1}y_{P_1}$$

$$1,13032705x_{P_1} + 1,33790882y_{P_1} = 11,45656858$$

$$5x_{P_1}^2 + 5y_{P_1}^2 + 8x_{P_1}y_{P_1} - 85,6592231x_{P_1} - 85,6592231y_{P_1} + 402,3439062 = 0$$

$$y_{P_1} = 8,563041374 - 0,844846101x_{P_1}$$

$$y_{P_1}^2 = 73,32567757 + 0,713764934x_{P_1}^2 - 14,46890424x_{P_1}$$

$$3,568824671x_{P_1}^2 - 72,34452120x_{P_1} + 366,6283879 = 5y_{P_1}^2$$

$$5 y_p^2 = 3,568824671 X_p^2 - 12,34452120 X_p + 366,6283879$$

$$8 X_p y_p = -6,7587688 X_p^2 + 68,5043310 X_p =$$

$$-(85,6592231) y_p = \quad \quad \quad + 72,3688607 X_p - 733,5034715$$

dall'eqn. $5 X_p^2 - 85,6592231 X_p + 402,3439062$

Sommando: $1,81005587 X_p^2 - 17,13055260 X_p + 35,4688226 = 0$

si ha l'equazione di 2° grado in X_p , che possiamo:

$$X_p^2 - 2(4,7320508) X_p + 19,5954297 = 0$$

$$X_p = 4,7320508 \pm 1,6723860 \begin{cases} X_p = 6,4044368 \\ X_p = 3,0596648 \end{cases}$$

$$y_p = \begin{cases} 3,1522779 \\ 5,9780955 \end{cases} ; \quad z_p = \begin{cases} 2,3013763 \\ 3,3392852 \end{cases}$$

Verifichiamo i due risultati:

$$6,4044368^2 + 3,1522779^2 + 2,3013763^2 = 56,25 = \overline{OP}^2 = \overline{OP}^2$$

$$3,0596648^2 + 5,9780955^2 + 3,3392852^2 = 56,25 = \overline{OP}^2 = \overline{OP}^2$$

$$(0,5)(6,4044368) + (0,292418237)(3,1522779) + (0,815163526)(2,3013763) = 6 = \overline{ON}$$

$$(0,5)(3,0596648) + (0,292418237)(5,9780955) + (0,815163526)(3,3392852) = 6 = \overline{ON}$$

$$(6,4044368 - 5)^2 + (3,1522779 - 5)^2 + (2,3013763 - 2,5)^2 = \overline{PP_1}^2$$

$$\overline{PP_1}^2 = 5,425971$$

$$\overline{PP_1} = 2,329371387$$

$$(3,0596648 - 5)^2 + (5,9780955 - 5)^2 + (3,3392852 - 2,5)^2 = 5,425971$$

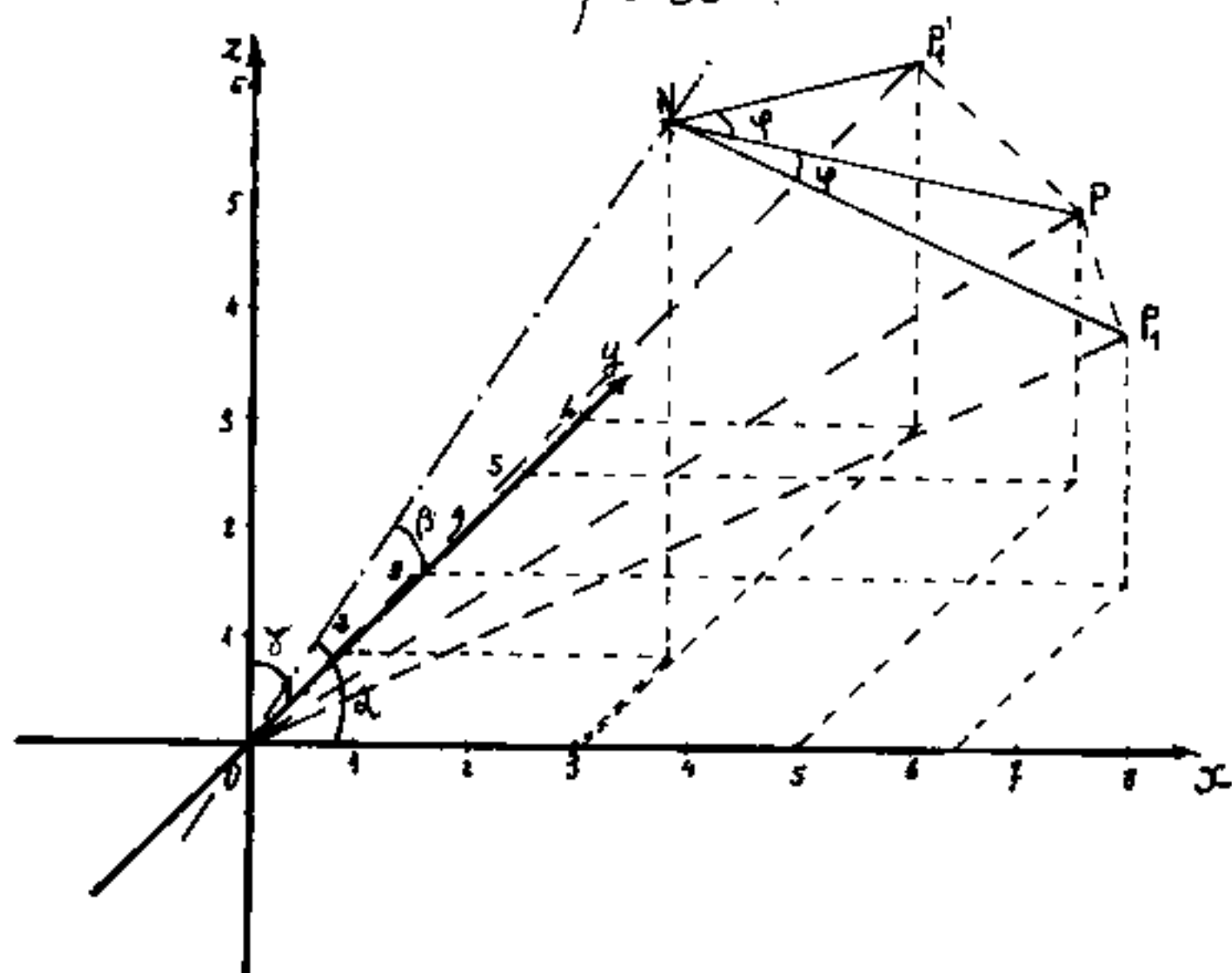
poiché $X_N = 6 \times 0,5 = 3$; $y_N = (0,292418237)6 = 1,754509422$; $z_N = 4,890981156$

$$(3 - 6,4044368)^2 + (1,754509422 - 3,1522779)^2 + (4,890981156 - 2,3013763)^2 = 20,25 = \overline{PN}^2$$

$$(3 - 3,0596648)^2 + (1,754509422 - 5,9780955)^2 + (4,890981156 - 3,3392852)^2 = 20,25 = \overline{PN}^2$$

Si è così verificato che le due risoluzioni delle coordinate di P_1 danno due diversi punti P_1 appartenenti allo stesso piano di P , entrambi equidistanti da O e da N ed aventi la stessa distanza da P cioè:

$\overline{PP_1} = \overline{PP'_1} = 2,329341387$. Quindi i due triangoli PNP_1 ; PNP'_1 giacciono da banda opposta di NP infatti: $\cos \varphi = \frac{2\overline{PN}^2 - \overline{PP_1}^2}{2\overline{PN}^2} = \left(1 - \frac{\overline{PP_1}^2}{2\overline{PN}^2}\right) = 0,86602540$
da cui $\varphi = 30^\circ$.



Il disegno prospettico falsa le dimensioni in scala; ma, noi abbiamo dimostrato che $N; P; P_1; P'_1$ sono complanari.

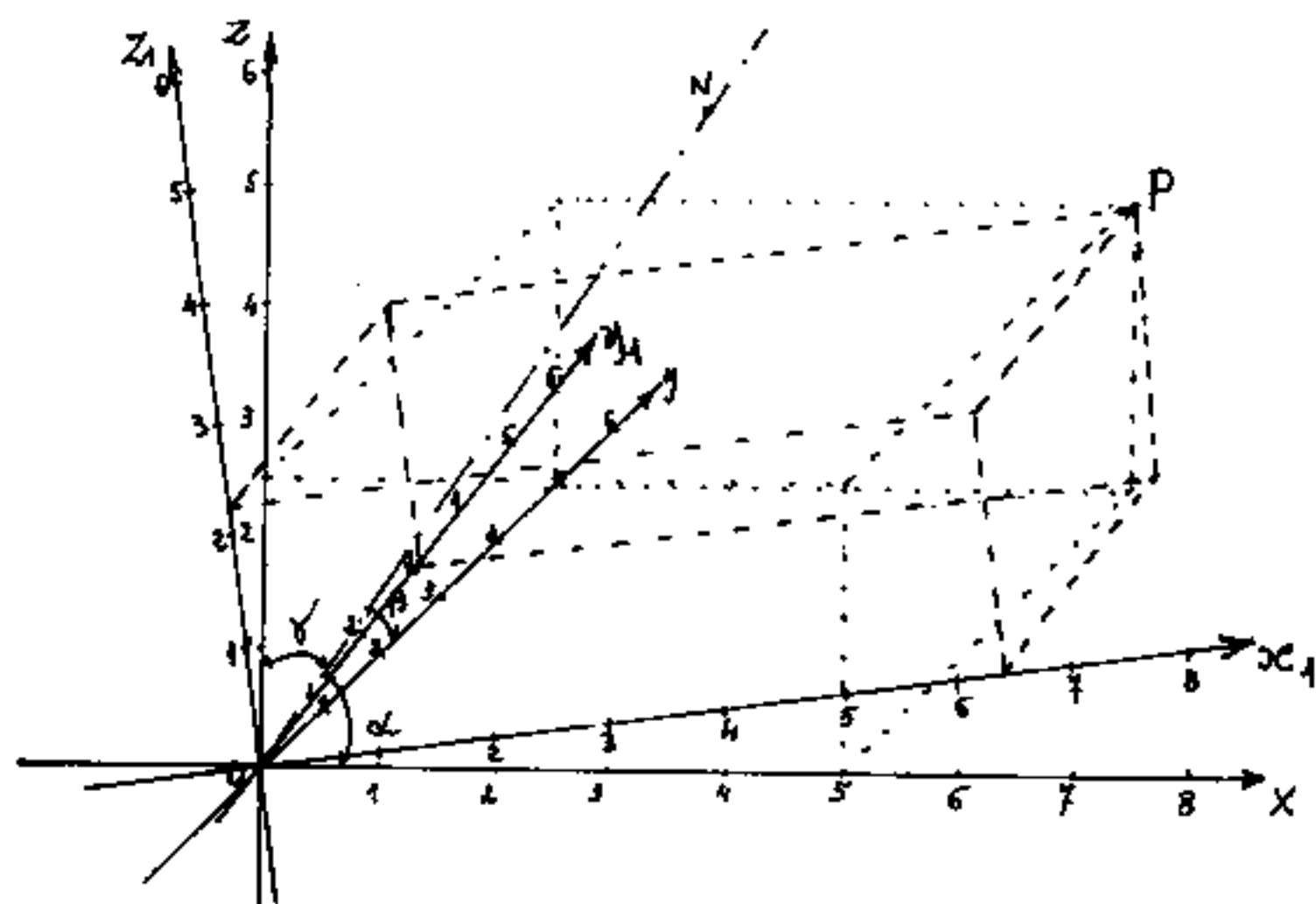
che: $\overline{NP} = \overline{NP_1} = \overline{NP'_1}$; che: $\overline{PP_1} = \overline{PP'_1}$; che: $\varphi = \hat{P_1NP} = \hat{PNP'_1}$; che $\overline{OP_1} = \overline{OP} = \overline{OP'_1}$.

Le due risoluzioni dipendono dal verso di rotazione dell'angolo φ .

Se noi proiettiamo sul piano XY i punti N, P, P_1 e P_2 notiamo che il raggio $\overline{NP}$ si muove anti-orario per raggiungere $\overline{NP_1}$ compiendo la proiezione dell'angolo φ ; ed invece si muove orario per raggiungere $\overline{NP_2}$.

Queste osservazioni ci consentono di scegliere fra le due risoluzioni, qualora il problema avesse precisato il verso di φ rispetto all'orientamento di $\overrightarrow{ON}$ ed $\overrightarrow{NP}$.

Inversamente se consideriamo P fermo e che gli assi x, y, z ruotino di φ intorno all'asse ON , avremo la figura ore rispetto al sistema ruotato x, y, z .



il punto P ha le coordinate di P_1 (vedasi anche la precedente figura). Il disegno prospettico è solo indicativo, infatti nello spazio tridimensionale le figure proiettate si deformato.

ci domandiamo: "il nostro ellissoide al centro, di equazione: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, se ruota intorno a z dell'angolo α , che equazione avrà?" L'equazione sarà ancora: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$ con z_1 coincidente con z . se vogliamo riferirli agli assi x, y, z avremo:

$$\left(\frac{y \sin \alpha + x \cos \alpha}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{y^2 \sin^2 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha}{a^2} \right) + \left(\frac{y^2 \cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha}{b^2} \right) + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\boxed{x^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + \frac{2xy \cos \alpha \sin \alpha (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Con ciò abbiamo riferito il solido ruotato agli assi ordinari. Possiamo ora ruotarlo rispetto all'asse y di un angolo β ; rifacendo il solito discorso consideriamo il solido riferito agli assi x, y, z_1 con y_1 coincidente con y e facciamo le solite sostituzioni:

$$\left[\begin{aligned} & \left(z \sin \beta + x \cos \beta \right)^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + \left(z \sin \beta + x \cos \beta \right) \frac{2xy \sin \alpha \cos \alpha (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} + \\ & + \frac{\left(z \cos \beta - x \sin \beta \right)^2}{c^2} = 1 \end{aligned} \right]$$

Sviluppando ed ordinando si ha:

$$\left[\begin{aligned} & x^2 \left(\frac{\cos^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \beta}{c^2} \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \beta}{c^2} \right) + \\ & + 2xy \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \right) + 2xz \left(\frac{\sin \beta \cos \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha}{b^2} - \frac{\sin \beta \cos \beta}{c^2} \right) + \\ & + 2yz \left(\frac{\sin \beta \sin \alpha \cos \alpha (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \right) = 1 \end{aligned} \right]$$

Possiamo infine dare una rotazione δ intorno all'asse x , ed avremo:

$$\begin{aligned} & \left[x^2 \left(\frac{\cos^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \beta}{c^2} \right) + (z \sin \delta + y \cos \delta) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + \right. \\ & + (z \cos \delta - y \sin \delta) \left(\frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \beta}{c^2} \right) + \\ & + 2x(z \sin \delta + y \cos \delta) \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \right) + \\ & + 2x(z \cos \delta - y \sin \delta) \left(\frac{\sin \beta \cos \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha}{b^2} - \frac{\sin \beta \cos \beta}{c^2} \right) + \\ & \left. + 2(z \sin \delta + y \cos \delta)(z \cos \delta - y \sin \delta) \left(\frac{\sin \beta \sin \alpha \cos \alpha (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \right) = 1 \right] \end{aligned}$$

che possiamo sviluppare ed ordinare:

$$\begin{aligned} & \left[x^2 \left(\frac{\cos^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \beta}{c^2} \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{b^2} + \right. \right. \\ & + \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{c^2} - \\ & - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \alpha (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \left. \right) + z^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{b^2} + \right. \\ & + \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{c^2} + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \alpha (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} + \\ & + 2xy \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \cos \beta (b^2 - a^2)}{b^2 c^2} - \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \beta \cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \beta}{c^2} \right) + \\ & + 2xz \left(\frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} + \frac{\cos \alpha \sin \beta \cos \beta \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos \alpha \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha}{b^2} - \frac{\cos \alpha \sin \beta \cos \beta}{c^2} \right) + \\ & \left. + 2yz \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta}{b^2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{a^2} - \right. \right. \\ & \left. - \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{b^2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta}{c^2} + \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Trattiamo il problema in generale.

La rotazione di assi nello spazio

Nel piano, abbiamo già trattato la rotazione di assi, ed eravamo pervenuti alle formule:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

o viceversa:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$$

Ore: x, y sono le coordinate del punto rispetto agli assi: x, y ed x_1, y_1 sono le coordinate dello stesso punto rispetto agli assi x_1 ed y_1 ruotati di α rispetto ad x, y , (nel verso di rotazione della $x(+)$ che va a sovrapporsi alla $y(+)$).

Nei due sistemi di assi era comune e fissa l'origine "0". Però, volendo ruotare una figura riferita al sistema x, y ; abbiamo avvertito che non potevamo applicare semplicemente la rotazione di assi, perché si sarebbe spostato il centro della figura. Quindi se volevamo immutate le coordinate del centro figura, in modo che la figura ruotasse intorno al proprio centro, dovevamo prima ruotarla nella posizione al centro assi e poi traslarla (e non inversamente) (Vedi vol. II).

Nello spazio il problema è più complesso.

Occorre prima di tutto distinguere la rotazione degli assi intorno ad una retta passante per l'origine, (ferma restando l'origine) il che implica che un insieme di punti cambi le proprie coordinate in modo tale da risultare traslati sull'arco, che ha per centro l'origine degli assi, e l'ampiezza proporzionale all'angolo di rotazione ed alla distanza dall'asse. Occorre distinguere il caso in cui, fermi restando gli assi, si ruota un solido, (un insieme di punti), intorno ad una retta passante o no per il solido stesso. (I punti sull'asse di rotazione mantengono le loro coordinate).

La rotazione degli assi di riferimento, in linea di principio può ridursi a rotazioni piane, facendo prima ruotare gli assi x, y , intorno all'asse z , dell'angolo α_1 , cioè fino a raggiungere la posizione x_1, y_1 ; poi far ruotare gli assi x_1 e z_1 (z_1 è rimasta coincidente con z) intorno all'asse y_1 con angolo α_2 fino a raggiungere la posizione x_2, z_2 (al solito y_1 coincide con y_2); infine si ruotano gli assi y_2, z_2 intorno ad x_2 fino ad y_3, z_3 (x_3 coincide con x_2).

Questo procedimento, che stiamo per svolgere, deve essere completato; infatti, ogni rotazione intorno ad un punto, ammette un solo asse di rotazione ed un solo angolo che ne misura l'ampiezza. Quindi una volta trovate le coordinate finali x_3, y_3, z_3 , in funzione di x, y, z dovremo trovare l'equazione della retta per "O" intorno alla quale avviene la rotazione, e l'ampiezza φ della rotazione stessa.

Il concetto di angolo come variazione di direzione, porta a scindere l'angolo su un piano nello spazio, in due angoli, ciò avviene con gli strumenti topografici come il teodolite, ove una variazione di direzione, è misurata da un angolo orizzontale detto "azimutale" (variazione di azimut) e da un angolo verticale (zenitale). Ma se abbiamo una variazione dell'angolo zenitale, allora occorre conoscere ^{anche} l'angolo riferito all'orizzonte, e gli angoli diventano tre.

Per definire una retta per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali, bastano due coseni direttori, il terzo è consequenziale, essendo "uno" la somma dei quadrati.

Iniziamo il calcolo della rotazione degli assi

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \text{intorno a } Z \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = (\cos \alpha_1) x + (\sin \alpha_1) y \\ y_1 = (\cos \alpha_1) y - (\sin \alpha_1) x \\ z_1 = z \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{(successivamente)} \\ \alpha_2 \\ \text{intorno ad } y_1 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} z_2 = (\cos \alpha_2) z_1 + (\sin \alpha_2) x_1 \\ y_2 = y_1 = (\cos \alpha_1) y - (\sin \alpha_1) x \\ x_2 = (\cos \alpha_2) x_1 - (\sin \alpha_2) z_1 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{(successivamente)} \\ \alpha_3 \\ \text{intorno a } x_2 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 = (\cos \alpha_2) x_1 - (\sin \alpha_2) z_1 \\ y_3 = (\cos \alpha_3) y_2 + (\sin \alpha_3) z_2 \\ z_3 = (\cos \alpha_3) z_2 - (\sin \alpha_3) y_2 \end{array} \right.$$

Facciamo ora le sostituzioni in modo da esprimere i valori delle coordinate ruotate, in funzione delle coordinate iniziali.

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = (\cos \alpha_2) (z) + (\sin \alpha_2) ((\cos \alpha_1) x + (\sin \alpha_1) y) \\ y_2 = (\cos \alpha_1) y - (\sin \alpha_1) x \\ x_2 = (\cos \alpha_2) ((\cos \alpha_1) x + (\sin \alpha_1) y) - (\sin \alpha_2) z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = (\cos \alpha_2) (\sin \alpha_1) x + (\sin \alpha_1) (\sin \alpha_2) y + (\cos \alpha_2) z \\ y_2 = -(\sin \alpha_1) x + (\cos \alpha_1) y \\ x_2 = (\cos \alpha_1) (\cos \alpha_2) x + (\sin \alpha_1) (\cos \alpha_2) y - (\sin \alpha_2) z \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_3 = -(\sin \alpha_2) Z + \cos \alpha_2 \left[(\cos \alpha_1) X + (\sin \alpha_1) Y \right] \\ y_3 = (\cos \alpha_3) \left[-(\sin \alpha_1) X + (\cos \alpha_1) Y \right] + (\sin \alpha_3) \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2) X + (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2) Y + (\cos \alpha_2) Z \right] \\ z_3 = (\cos \alpha_3) \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2) X + (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2) Y + \cos \alpha_2 Z \right] - (\sin \alpha_3) \left[-(\sin \alpha_1) X + (\cos \alpha_1) Y \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = (\cos \alpha_1)(\cos \alpha_2) X + (\sin \alpha_1)(\cos \alpha_2) Y + (\sin \alpha_2) Z \\ y_3 = [(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) - (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3)] X + [(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) + (\cos \alpha_1 \cos \alpha_3)] Y + [(\cos \alpha_2 \sin \alpha_3)] Z \\ z_3 = [(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) + (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2)] X + [(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) - (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2)] Y + [(\cos \alpha_2 \cos \alpha_3)] Z \end{cases}$$

Si nota che la x_3 è indipendente da α_3 , ciò dipende dal procedimento sequenziale delle rotazioni. Poiché:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) = \overline{OP} = \overline{OP_3}$$

avremo:

$$\frac{\cos \alpha}{\overline{OP}} = \frac{x}{\overline{OP}} \quad ; \quad \frac{\cos \beta}{\overline{OP}} = \frac{y}{\overline{OP}} \quad ; \quad \frac{\cos \gamma}{\overline{OP}} = \frac{z}{\overline{OP}}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\overline{OP_3}} = \frac{x_3}{\overline{OP}} \quad ; \quad \frac{\cos \beta}{\overline{OP_3}} = \frac{y_3}{\overline{OP}} \quad ; \quad \frac{\cos \gamma}{\overline{OP_3}} = \frac{z_3}{\overline{OP}}$$

cioè: "Nella rotazione, le coordinate iniziali e finali stanno fra loro come i rispettivi coseni direttori della retta che unisce l'origine fissa degli assi al punto"

Possiamo dire:

1) I punti si muovono mantenendo costante la distanza dall'asse di rotazione. 2) Tali distanze descrivono l'angolo φ su piani normali all'asse. 3) Ad ogni valore di φ corrisponde un piano del fascio passante per l'asse. Un piano iniziale ed un elemento

che individua il piano ruotato di coordinate x_3, y_3, z_3 .

4) L'intersezione di questi due piani, col piano perpendicolare all'asse individua le due rette normali all'asse su cui insistono le distanze dei punti.

5) Quindi ogni azione di rotazione, avviene su un piano normale all'asse e può essere rappresentata da un segmento parallelo all'asse, la cui ampiezza sia proporzionale all'ampiezza dell'angolo, con verso tale da determinare il verso di rotazione.

Tale segmento è un vettore: "vettore momento" che rappresenta qualcosa di più di un generatore di angoli finiti, infatti rappresenta la coppia forze agenti sul piano, cioè una azione continua di rotazione che può pensarsi come un'angolo percorso nell'unità di tempo (velocità angolare), ma è ancora qualcosa di diverso. Infatti l'azione del ruotare implica l'estrinsecarsi di un lavoro, cioè una trasmutazione di energia. Una coppia di forze può torcere un'asta di un angolo finito accumulando nell'asta tanta energia elastica da provocare una coppia uguale e contraria, tale da ristabilire l'equilibrio; ma può anche provocare una accelerazione angolare, che generi il moto di

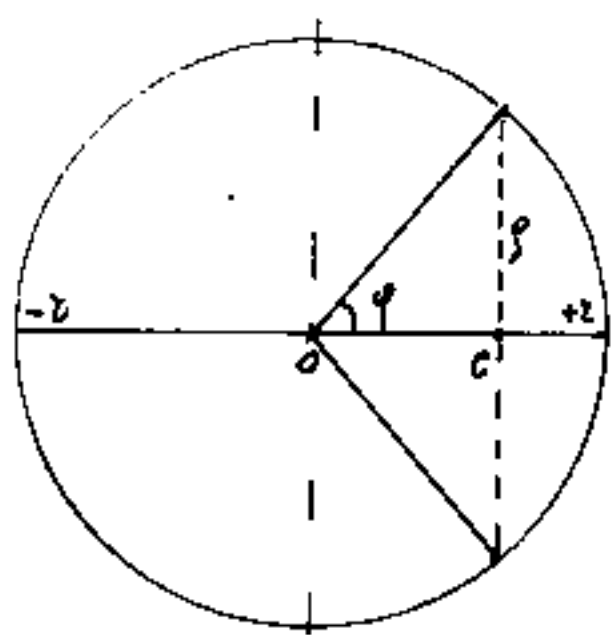
un corpo e trasformi in energia cinetica l'azione della coppia. Ma, nel calcolo vettoriale incontreremo un altro speciale vettore, detto "rotore" che percorrendo il bordo di un'area chiusa, compie un lavoro detto circuitazione, determinato dall'integrale, esteso al circuito, che ha per fattore finito il valore dell'intensità del rotore in quel punto, e per fattore differenziale, il differenziale della lunghezza del circuito. Questo integrale detto comunemente l'integrale della circuitazione equivale al flusso di un altro vettore attraverso l'area circuitata. Anche il flusso è rappresentato da un integrale, esteso a tutta l'area, e che ha per fattore finito il valore del vettore in quel punto, e per fattore differenziale, il differenziale dell'area. Il legame fra il vettore che genera il flusso ed il conseguente rotore, è fondamentale, basti ricordare le equazioni dell'elettromagnetismo.

Abbiamo qui anticipato alcune relazioni di fisica classica, per evidenziare l'importanza di mettere a fuoco le rotazioni nello spazio geometrico.

Ma, cos'è una ruotazione? Quali sono gli elementi che definiscono una ruotazione? Noi uomini siamo troppo abituati a commisurare lo spazio in lungo, in largo, in alto, (quelli che divennero gli assi cartesiani) al quale aggiungere la quarta dimensione tempo (Einstein). Il problema di correlare misure lineari e misure angolari fece sorgere la trigonometria, (che in fondo è solo la costruzione di tabelle di conti fatti); la misura lineare è una relatività; gli angoli invece dispongono di una loro unità: "il ciclo". Mentre è facile immaginare, in un cerchio, un raggio che parta da una posizione iniziale e ruoti descrivendo tutta l'area del cerchio, molto meno facile è pensarlo nell'angolo solido. Se infatti, in una sfera, consideriamo un raggio in una certa posizione iniziale, ed il punto terminale sulla superficie sferica si trasmuti in un'area differenziale, che allargandosi diventa una calotta sferica, mentre il raggio si trasmuta in superficie conica avente la base comune con la calotta, al limite di un quarto di ciclo spaziale, la superficie conica è divenuta un cerchio massimo; la calotta una semisfera, inizia a diminuire la calotta e dopo mezzo ciclo si ha il raggio opposto a quello di partenza.

Anche in questo caso si ha una "direzione" che è la direzione del raggio iniziale, si ha una "oscillazione" scomponibile in quattro tempi, cioè un ciclo che implica una frequenza. È notevole considerare il centro e la circonferenza della base comune fra calotta e cono; infatti, mentre il punto: "centro si sposta linearmente da $+\tau$ a $-\tau$ ", ove τ è il raggio, la circonferenza parte da zero, raggiunge un massimo, torna a zero (in $-\tau$), da dove riparte in verso opposto, riproduce un massimo in verso opposto (minimo) e torna a zero nel punto di partenza iniziale.

Se consideriamo un piano qualsiasi che contenga il raggio iniziale, esso taglierà la sfera secondo un cerchio massimo; possiamo con ciò vedere che l'angolo



piano φ , (di semiapertura del cono) determina l'istante dell'oscillazione in quanto φ varia da zero ad un giro, (2π) , ed avremo che il raggio ρ della circonferenza $= \rho = \tau \sin \varphi$, mentre la po-

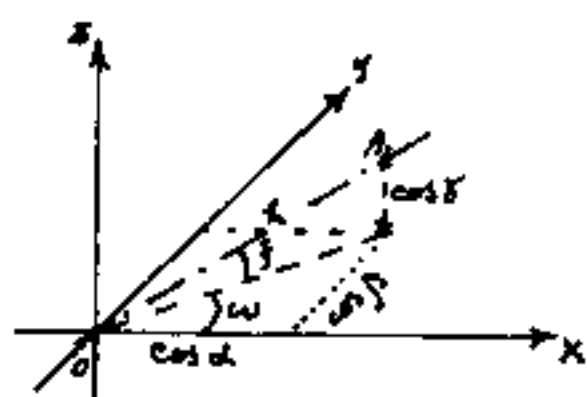
sizione del centro C cioè $OC = \tau \cos \varphi$.

Si hanno due vibrazioni, una longitudinale (direzione) una trasversale nei piani di giacitura; entrambi della

stessa frequenza, entrambi con lo stesso parametro " φ ".

Quindi l'angolo piano, come variazione di direzione, giacente in qualunque posizione dello spazio, può sempre correlarsi coi angoli piani riferiti ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e viceversa.

Consideriamo infatti una certa direzione, definita rispetto agli assi dai coseni direttori: $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$; puntiamo in quella direzione un teodolite in stazione al centro assi, avente per direzione azimutale l'asse x e sia " w " l'angolo orizzontale (azimut) e sia " ξ " l'angolo di elevazione. (Angoli letti sul cerchio orizzontale azzerato sull'azimut, e sul cerchio verticale azzerato sul piano orizzontale, altezza strumentale zero affinché i vertici di questi angoli coincidano col centro assi.)



Sia: $\overline{OA} = 1$, avremo che le coordinate di A coincidono coi coseni direttori di A, Avremo quindi

$$\boxed{\tan(w) = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}}$$

$$\boxed{\tan(\xi) = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} = \frac{\sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}}}$$

$$\tan(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} - 1} \quad ; \quad \cos(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} - 1}}$$

$$\boxed{\cos(\xi) = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} \quad ; \quad \cos(w) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}}$$

$$\boxed{\cos w = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}}}$$

$$\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \cos(\xi) = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\omega)} \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \cos(\omega) \cdot \cos(\xi)}$$

$$\cos \beta = \tan(\omega) \cdot \cos \alpha = \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} \cdot \cos(\omega) \cos(\xi)$$

$$\boxed{\cos \beta = \sin(\omega) \cos(\xi)}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)} = \sqrt{1 - \cos^2(\xi)} = \sin(\xi)$$

$$\boxed{\sin(\gamma) = \sin(\xi)}$$

Dagli elementi di rilievo topografico, (nelle condizioni sopra esposte), cioè noti ω_A, ξ_A e ω_B, ξ_B di due direzioni $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ è possibile calcolare i coseni direttori rispettivi e quindi dalla formula:

$$\boxed{\cos \hat{e}_i = \cos \alpha \cos \alpha_i + \cos \beta \cos \beta_i + \cos \gamma \cos \gamma_i}$$

già trattata, è possibile calcolare l'angolo delle due direzioni $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ cioè: $\hat{AOB} = \varphi$

$$\cos \varphi = (\cos \omega_A \cdot \cos \xi_A)(\cos \omega_B \cdot \cos \xi_B) + (\sin \omega_A \cos \xi_A)(\sin \omega_B \cos \xi_B) + \sin \xi_A \sin \xi_B$$

$$\boxed{\cos \varphi = \cos(\omega_A - \omega_B) \cos \xi_A \cos \xi_B + \sin \xi_A \sin \xi_B}$$

L'asse di rotazione della direzione $\overrightarrow{OA}$, che ruota per sovrapporsi alla direzione $\overrightarrow{OB}$, è, ovviamente, una retta per l'origine normale al piano AOB , definita da:

anc:

$$\boxed{\begin{cases} (\cos \alpha_A)x + (\cos \beta_A)y + (\cos \gamma_A)z = 0 \\ (\cos \alpha_B)x + (\cos \beta_B)y + (\cos \gamma_B)z = 0 \end{cases}}$$

Detta "z" la retta asse, volendo i suoi coseni direttori (vedi pag 33) avremo:

$$\cos(\hat{x}z) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\beta_A & \cos\gamma_A \\ \cos\beta_B & \cos\gamma_B \end{vmatrix}}{K}, \quad \cos(\hat{y}z) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\gamma_A & \cos\alpha_A \\ \cos\gamma_B & \cos\alpha_B \end{vmatrix}}{K}; \quad \cos(\hat{z}z) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha_A & \cos\beta_A \\ \cos\alpha_B & \cos\beta_B \end{vmatrix}}{K}$$

ove:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} \cos\beta_A & \cos\gamma_A \\ \cos\beta_B & \cos\gamma_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma_A & \cos\alpha_A \\ \cos\gamma_B & \cos\alpha_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha_A & \cos\beta_A \\ \cos\alpha_B & \cos\beta_B \end{vmatrix}^2}}$$

Il piano normale alla retta asse, e passante per l'origine degli assi avrà per equazione:

$$\cos(\hat{x}z)x + \cos(\hat{y}z)y + \cos(\hat{z}z)z = 0 \quad (\text{piano AOB})$$

e conterrà le due rette $\vec{OA}$ ed $\vec{OB}$

Come avevamo previsto la definizione di φ richiede tre angoli: la variazione azimutale $\omega = (\omega_A - \omega_B)$; ed i due angoli ξ_A , e ξ_B riferiti alla direzione orizzontale, (o zenitali $(90 - \xi_A); (90 - \xi_B)$)

Quindi per permettere ogni possibile posizione ad un sistema di tre assi cartesiani ortogonali (ferma restando l'origine) occorrono le tre rotazioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, infatti se facessimo solo le rotazioni intorno a "z" ed a "y" l'asse x rimarrebbe nel piano xy.

Le tre equazioni che esplicitano x_3, y_3, z_3 in funzione di x, y, z , e di: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ci consentono

di calcolare le coordinate di $P = (x_3, y_3, z_3)$.

Esempio numerico

Le coordinate iniziali siano: $P = (x, y, z) = (5; 5; 2,5)$

sia $\alpha_1 = \alpha_2 = 20^\circ$; $\alpha_3 = 10^\circ$

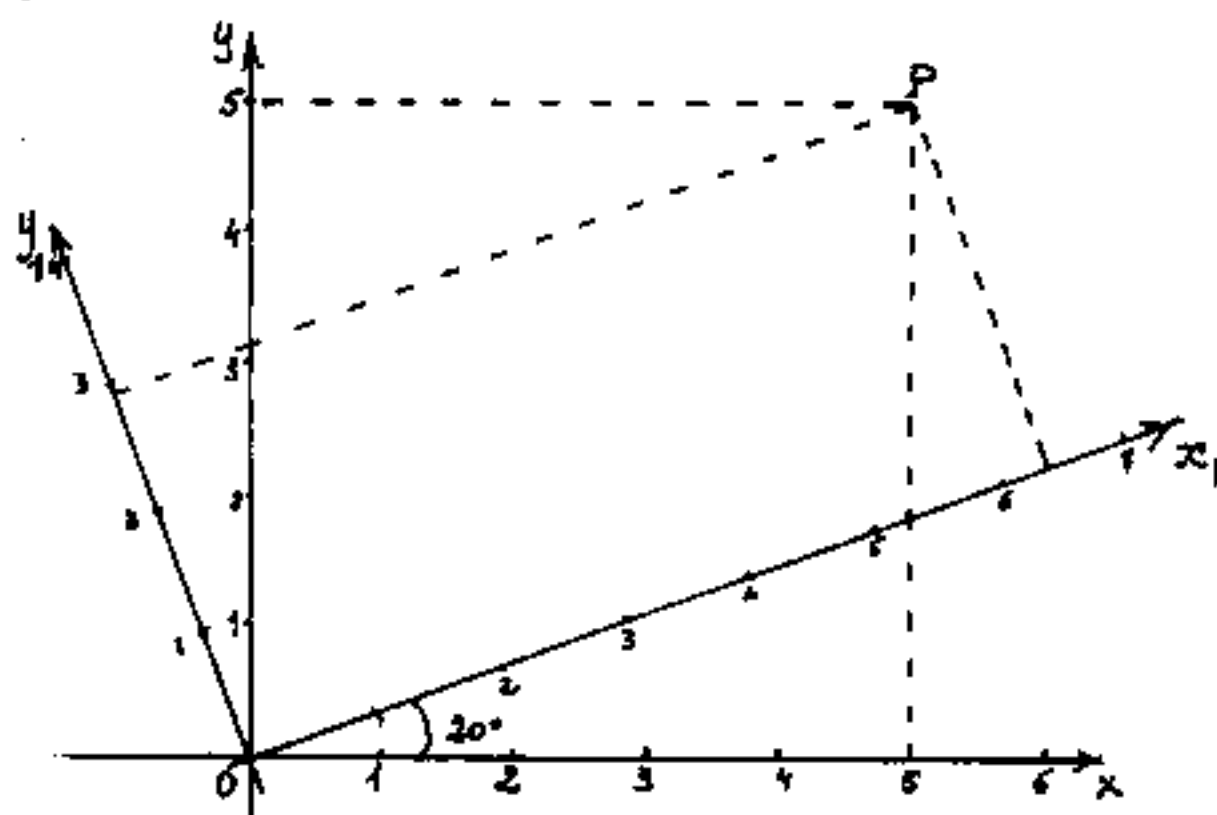
$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0,342020143$; $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 0,939692621$

$\sin \alpha_3 = 0,173648178$; $\cos \alpha_3 = 0,984807753$

Sappiamo $\overline{OP^2} = 56,25$; $\overline{OP} = 7,50$

Calcoliamo le coordinate della rotazione intorno a z

$$\left. \begin{aligned} \underline{x_1} &= (\cos \alpha_1)x + (\sin \alpha_1)y = (0,939692621) \cdot 5 + (0,342020143) \cdot 5 = \underline{6,408563821} \\ \underline{y_1} &= (\cos \alpha_1)y - (\sin \alpha_1)x = (0,939692621) \cdot 5 - (0,342020143) \cdot 5 = \underline{2,98836338} \\ \underline{z_1} &= z = \underline{2,5} \end{aligned} \right\}$$



Calcoliamo le coordinate della successiva rotazione intorno ad y_1 di α_2

A questo proposito, poiché trattasi di una terna antioraria, sia nella formula, sia nel disegno, gli assi x_1 e z_1 visti dalla punta di y_1 , nel verso antiorario z_1 va su x_1 .

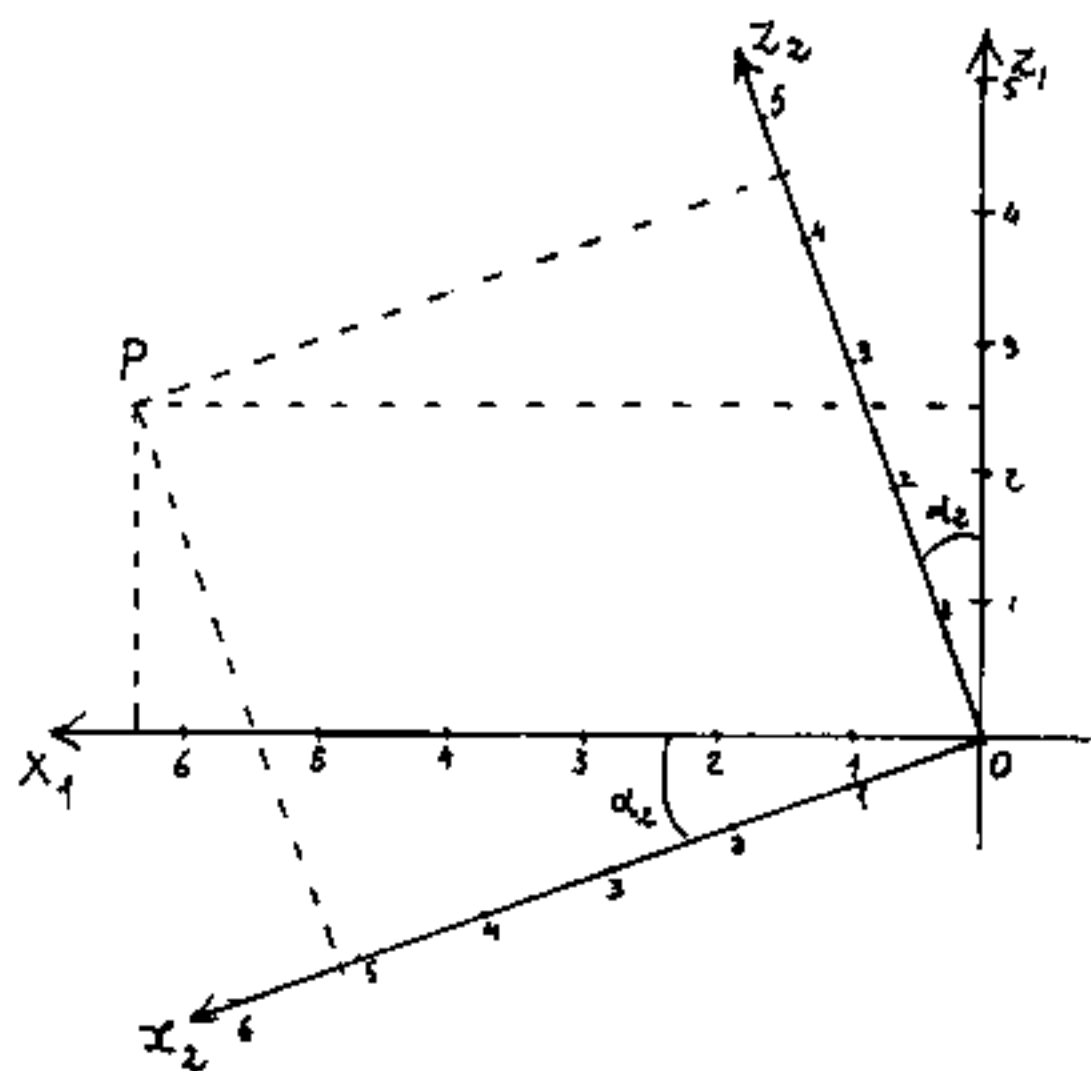
avremo quindi:

$$Z_2 = (\cos \alpha_2) Z_1 + (\sin \alpha_2) X_1 = (0,939692621) 2,5 + (0,342020143) (6,408563821) =$$

$$y_2 = y_1 =$$

$$X_2 = (\cos \alpha_2) X_1 - (\sin \alpha_2) Z_1 = (0,939692621) (6,408563821) - (0,342020143) 2,5 =$$

$$\begin{cases} Z_2 = 4,541089469 \\ y_2 = 2,988362387 \\ X_2 = 5,167029773 \end{cases}$$



(disegno visto
dalla punta di y_1
per visualizzare
il verso antiorario)

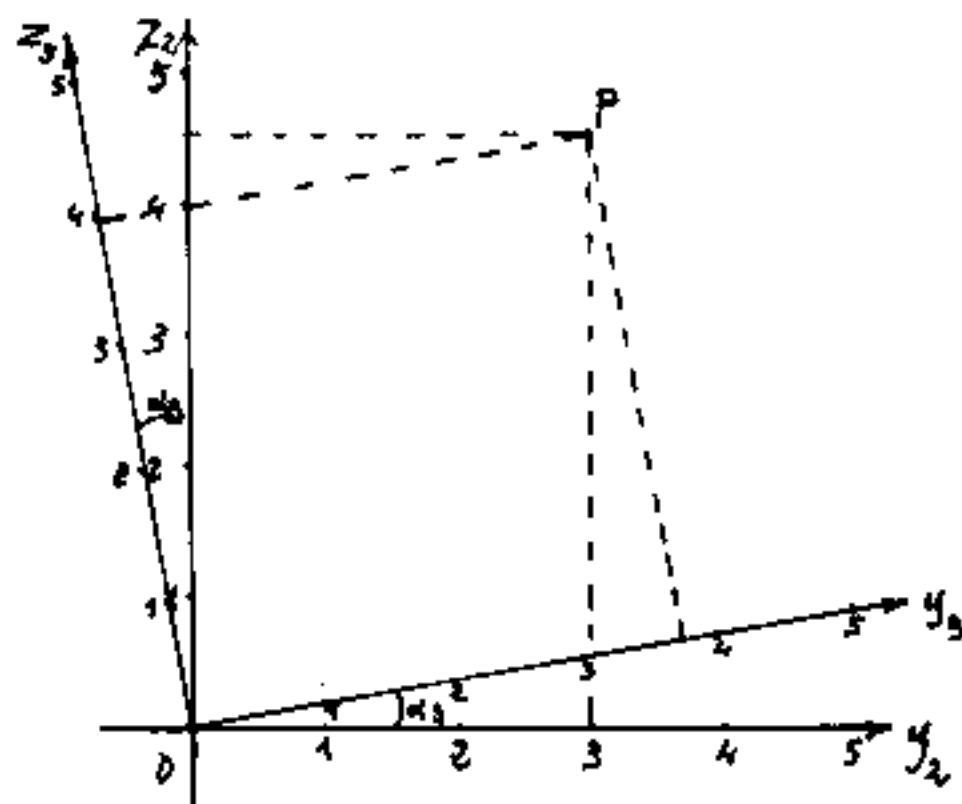
Calcoliamo ora le coordinate finali dovute alla successiva rotazione intorno ad x_2 di α_3 .

$$\underline{x_3} = x_2 = ((\cos \alpha_2) X_1 - (\sin \alpha_2) Z_1) = \underline{5,167029774} =$$

$$\underline{y_3} = (\cos \alpha_3) y_2 + (\sin \alpha_3) Z_2 = (0,984807753) (2,988362387) + (0,173648178) (4,541089) =$$

$$\underline{Z_3} = (\cos \alpha_3) Z_2 - (\sin \alpha_3) y_2 = (0,984807753) (4,541089469) - (0,173648178) (2,988362) =$$

$$\text{Valori finali delle coordinate di } P \left\{ \begin{array}{l} = x_3 = 5,167029774 \\ = y_3 = 3,731514359 \\ = z_3 = 3,953176431 \end{array} \right.$$



Allo stesso risultato si giunge applicando la formula finale.

L'equazione della retta $\overline{PP_3}$ (ammessi fissi gli assi e che ruoti il punto) sarà:

$$\frac{x - x_p}{x_3 - x_p} = \frac{y - y_p}{y_3 - y_p} = \frac{z - z_p}{z_3 - z_p}$$

$$+ \frac{x - 5}{0,167029774} = \frac{y - 5}{-1,268485640} = \frac{z - 2,5}{1,453176431}$$

$$\cos \alpha = 0,084265909 \rightarrow \frac{\alpha}{\overline{PP_3}} = 85^\circ 03' 03''$$

$$\cos \beta = -0,656138792 \rightarrow \frac{\beta}{\overline{PP_3}} = 130^\circ 55' 54''$$

$$\cos \gamma = 0,750349140 \rightarrow \frac{\gamma}{\overline{PP_3}} = 41^\circ 24' 48''$$

Coseni direttori della
retta $\overline{PP_3}$

$$(\sqrt{(x_3 - x_p)^2 + (y_3 - y_p)^2 + (z_3 - z_p)^2}) = \sqrt{3,748676519} = 1,93614992 = \overline{PP_3}$$

Per determinare l'asse di rotazione, occorre prima determinare il piano su cui P descrive archi di circonferenza. (la corda ora calcolata $\overline{P_3}$ può appartenere ad infinite circonferenze su infiniti piani del fascio per $\overline{P_3}$). Se consideriamo le coordinate di P_3 come iniziali, possiamo calcolare le sue coordinate finali (P_6) dopo le stesse tre rotazioni intorno Z , intorno Y , intorno X_2 . Sappiamo che $\overline{OP}^2 = 56,25$; $\overline{OP} = 7,50$. Verifichiamo $\overline{OP_3}^2 = 5,167029774^2 + 3,731514359^2 + 3,953176433^2 = 56,25$.

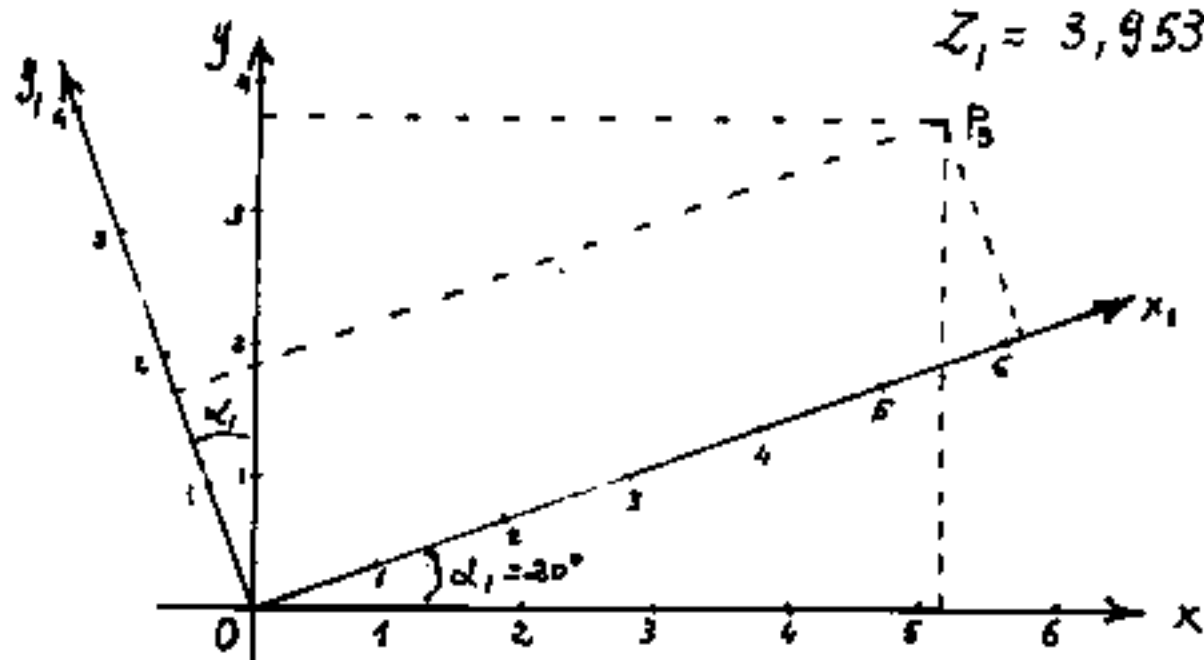
Rotazione intorno a Z ($\alpha_1 = 30^\circ$)

$$x_1 = \cos \alpha_1 (5,167029774) + \sin \alpha_1 (3,731514359) = x_1 = 6,131672825$$

$$y_1 = \cos \alpha_1 (3,73151435) - \sin \alpha_1 (5,167029774) = y_1 = 4,739248248$$

$$z_1 = Z$$

$$Z_1 = 3,953176433$$



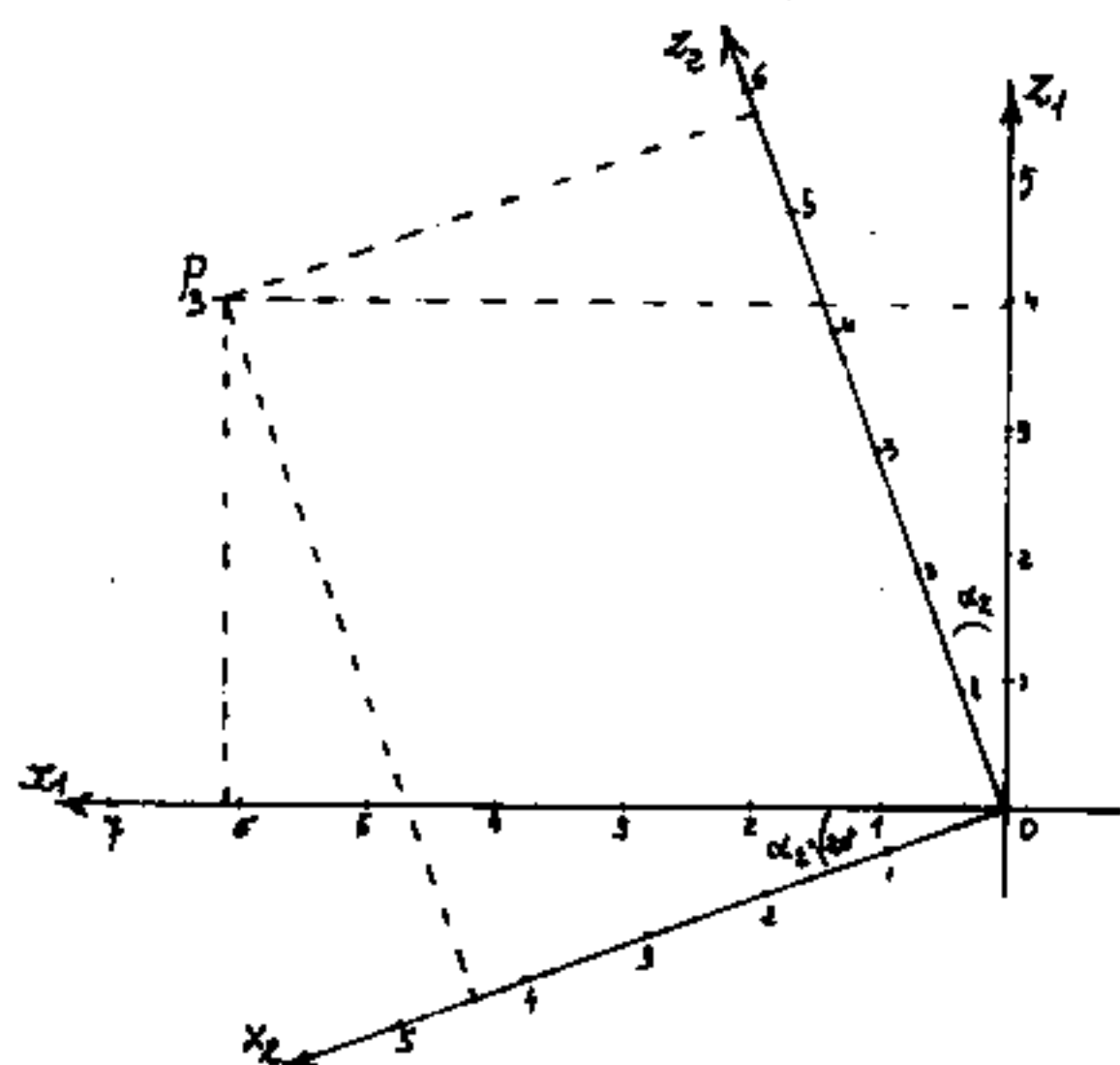
Il grafico serve sempre ad evitare grossolani errori di calcolo. Con disegni precisi si possono apprezzare le prime due cifre decimali per unità in centimetri. In certi tipi di problemi è opportuno far precedere la risoluzione grafica alla risoluzione algebrica o numerica.

Ruotazione intorno ad y_1 ($\alpha_2 = 20^\circ$)

$$x_2 = \cos \alpha_2 (3,953176434) + \sin \alpha_2 (6,131672825) = x_2 = 5,811926341$$

$$y_2 = y_1 = y_2 = 1,739248243$$

$$x_2 = \cos \alpha_2 (6,131672825) - \sin \alpha_2 (3,953176434) = x_2 = 4,409821737$$



disegno visto dalla
punta di y_1 per
apprezzare la rota-
zione antioraria.

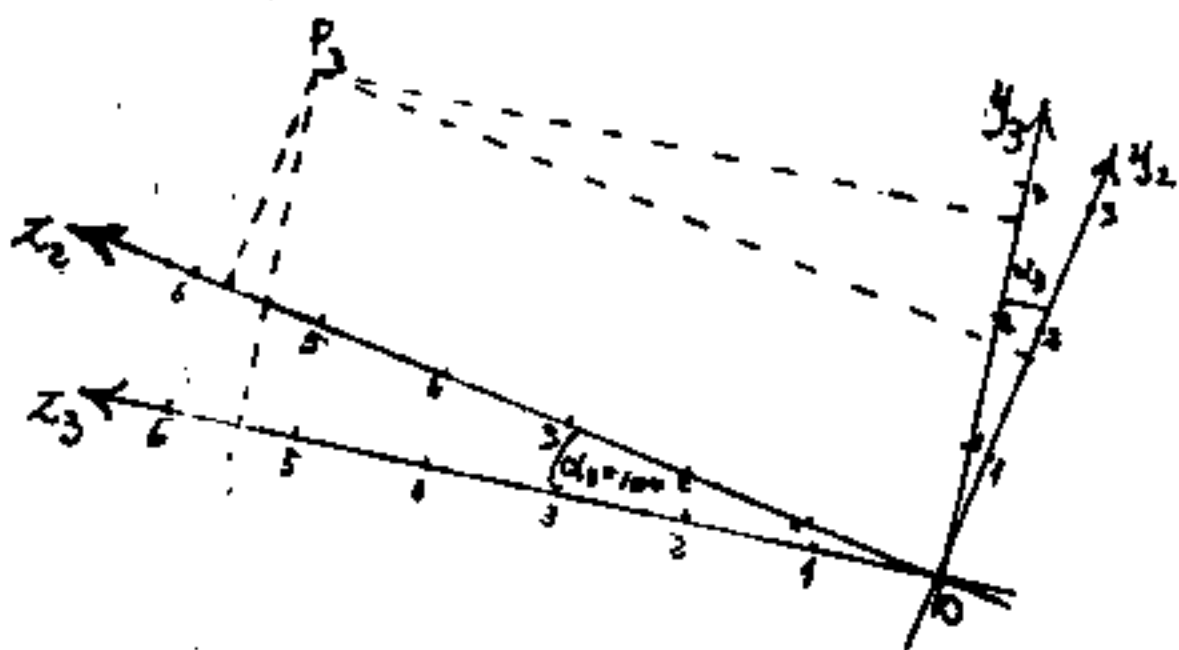
Ruotazione intorno ad x_2 ($\alpha_3 = 10^\circ$)

$$x_3 = x_2 = x_3 = 4,409821737$$

$$y_3 = \cos \alpha_3 (1,739248243) + \sin \alpha_3 (5,811926341) = y_3 = 2,722055572$$

$$z_3 = \cos \alpha_3 (5,811926341) - \sin \alpha_3 (1,739248243) = z_3 = 5,421612833$$

disegno visto
dalla punta di x_2



Verifichiamo che $\overline{OP} = \overline{OP}_3 = \overline{OP}_6$ cioè: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

$$(4,409821737)^2 + (2,722055572)^2 + (5,421612833)^2 = 56,25 = 7,5^2$$

Abbiamo così tre punti per i quali far passare il piano, ove $P=A$ e $P_3=B$ hanno descritto i loro archi di circonferenza: ($P=A$ per andare in $P_3=B$ e $P_3=B$ per andare in $P_6=C$).

Sappiamo (vedi cap. prec) che l'equazione del piano per tre punti dati: A, B, C è data da:

$$\begin{vmatrix} -1 & y_A & z_A \\ -1 & y_B & z_B \\ -1 & y_C & z_C \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_A & -1 & z_A \\ x_B & -1 & z_B \\ x_C & -1 & z_C \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \\ x_C & y_C & -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = 0$$

noi abbiamo:

$$x_A = 5 \quad ; \quad x_B = 5,167029774 \quad ; \quad x_C = 4,409821737$$

$$y_A = 5 \quad ; \quad y_B = 3,731514359 \quad ; \quad y_C = 2,722055572$$

$$z_A = 2,5 \quad ; \quad z_B = 3,953176433 \quad ; \quad z_C = 5,421612833$$

Risolviemo i singoli determinanti tenendo conto dei segni.

$$\begin{vmatrix} (y_C - y_A) & (y_B - y_A) \\ (z_C - z_A) & (z_B - z_A) \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} (x_B - x_A) & (z_B - z_A) \\ (x_C - x_A) & (z_C - z_A) \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} (y_B - y_A) & (x_B - x_A) \\ (y_C - y_A) & (x_C - x_A) \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_A y_B z_C + y_A z_B x_C + z_A x_B y_C \\ -x_A z_B y_C - y_A x_B z_C - z_A y_B x_C \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_C - y_A)(z_B - z_A) = (-2,21794428)(1,453176433) = -3,210289458$$

$$(y_B - y_A)(z_C - z_A) = (-1,268485641)(2,921612833) = -3,706023927$$

$$\Delta_1 = \underline{\underline{+0,555768769}}$$

$$(x_B - x_A)(z_C - z_A) = (0,167029774)(2,921612833) = +0,487996331$$

$$(z_B - z_A)(x_C - x_A) = (1,453176433)(-0,590178263) = -0,857633143$$

$$\Delta_2 = \underline{\underline{1,345629474}}$$

$$(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (-1,268485641)(-0,590178263) = 0,748632652 -$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (0,167029774)(-2,277944428) = -0,380484543$$

$$\Delta_3 = \underline{\underline{1,129117195}}$$

$$x_A (y_B z_C - z_B y_C) = 47,35030100$$

$$y_A (z_B x_C - x_B z_C) = -52,90415785$$

$$z_A (x_B y_C - y_B x_C) = -5,97592735$$

$$\Delta_4 = \underline{\underline{-11,52978420}}$$

Scriviamo l'equazione del piano

$$0,395768769 x + 1,345629474 y + 1,129117195 z = 11,5297842$$

per

$$\sqrt{0,395768769^2 + 1,345629474^2 + 1,129117195^2} = \underline{\underline{1,80062690}}$$

avremo l'equazione del piano ai coseni direttori

$$\cos \alpha = 0,219794989 \rightarrow \alpha = 77^\circ 18' 11''$$

$$\cos \beta = 0,747311657 \rightarrow \beta = 41^\circ 38' 31''$$

$$\cos \gamma = 0,627068936 \rightarrow \gamma = 51^\circ 09' 57''$$

coseni direttori
dell'asse di
rotazione.

$$\overline{ON} = 6,40320557$$

$$x_N = \overline{ON} \cos \alpha$$

$$x_N = 1,407392499$$

$$y_N = \overline{ON} \cos \beta$$

$$y_N = 4,785190165$$

$$z_N = \overline{ON} \cos \gamma$$

$$z_N = 4,015251302$$

$$\left. \begin{array}{l} x_N = \overline{ON} \cos \alpha \\ y_N = \overline{ON} \cos \beta \\ z_N = \overline{ON} \cos \gamma \end{array} \right\} \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} = \overline{ON}$$

$$\overline{OP}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{NP}^2 = 15,24895842.$$

$$\overline{NP} = \overline{AN} = \overline{BN} = \overline{CN} = 3,9049914756$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2} = 1,93614992$$

$$\overline{BC} = \overline{AB}$$

Abbiamo così l'equazione dell'asse di rotazione

$$\frac{x - x_N}{\cos \alpha} = \frac{y - y_N}{\cos \beta} = \frac{z - z_N}{\cos \gamma}$$

basta sostituire i valori ora noti.

Calcoliamo i triangoli ANB e BNC;

$$\overline{AN} = \sqrt{(5 - 1,407392499)^2 + (5 - 4,785190165)^2 + (2,5 - 4,015251302)^2}$$

$$\overline{AN} = 3,904991476$$

$$\overline{BN} = \sqrt{(5,167029774 - 1,407392499)^2 + (5,731514359 - 4,785190165)^2 + (3,95376433 - 4,015251302)^2}$$

$$\overline{BN} = 3,904991476$$

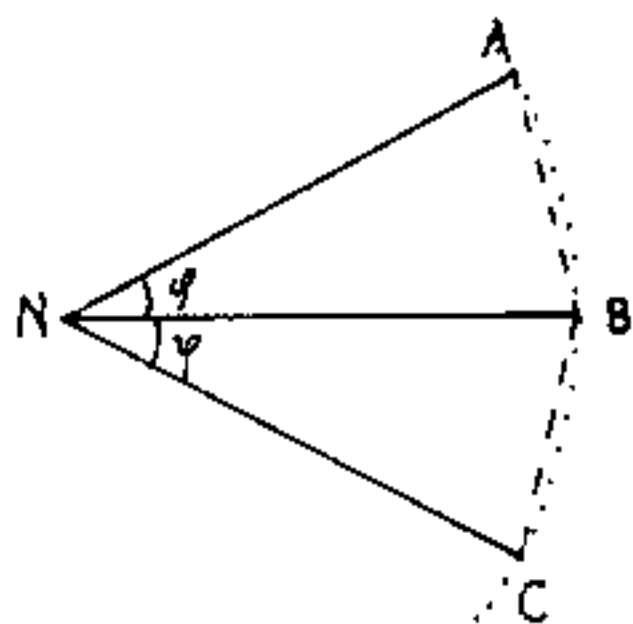
$$\overline{CN} = \sqrt{(4,409821737 - 1,407392499)^2 + (2,722055572 - 4,785190165)^2 + (5,421612833 - 4,015251302)^2}$$

$$\overline{CN} = 3,904991476$$

$$\overline{AB} = PP_3 = 1,93614992 \quad (\text{già calcolato})$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5,167029774 - 4,409821737)^2 + (3,731514359 - 2,722055572)^2 + (3,95376433 - 5,421612833)^2}$$

$$\overline{BC} = 1,93614992$$



$$\cos \varphi = \cos \hat{ANB} = \cos \hat{BNC}$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 - \overline{AB}^2}{2(\overline{AN})(\overline{BN})}$$

$$\text{poiché } \overline{AN} = \overline{BN}; \cos \varphi = \frac{2\overline{BN}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{BN}^2}$$

$$\cos \varphi = 0,8770841782$$

$$\varphi = 28^\circ 42' 27''$$

Verifichiamo considerando noti:

$P=A \equiv (5;5;2,5)$; $\cos \alpha = 0,2197949893$; $\cos \beta = 0,7473116569$;
 $\cos \gamma = 0,627068936$; (coseni direttori dell'asse); $\varphi = 28^\circ 42' 27''$;
(ampiezza della rotazione); $\cos \varphi = 0,877084178$;

Calcoliamo le coordinate di $P=A$, dopo la rotazione, che dovranno corrispondere alle coordinate di $B=P_B$.

$$\overline{OP}^2 = 5^2 + 5^2 + 2,5^2 = 56,25 \rightarrow \overline{OP} = 7,5$$

$$\overline{ON} = 5(0,2197949893) + 5(0,7473116569) + 2,5(0,627068936) = 6,40320557$$

$$\overline{ON}^2 = 41,00104157$$

$$\overline{PN}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2 = 56,25 - 41,00104157 = 15,248958425 \rightarrow \overline{PN} = 3,904991476$$

$$\overline{ON}^2 + \overline{PN}^2 \cos \varphi = 41,00104157 + (15,248958425)(0,877084178) = 54,37566174$$

Possiamo scrivere le tre equazioni:

$$\begin{cases} 5x_B + 5y_B + 2,5z_B = 54,37566174 \\ (0,2197949893)x_B + (0,7473116569)y_B + (0,627068936)z_B = 6,40320557 \\ x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = 56,25 \end{cases}$$

ricaviamo z_B dalla prima equazione:

$$z_B = 21,750264697 - 2x_B - 2y_B$$

$$(0,627068936)z_B = 13,638915335 - 1,254137871x_B - 1,254137871y_B$$

$$z_B^2 = 473,07401467 + 4x_B^2 + 4y_B^2 + 8x_By_B - 87,00105878x_B - 87,00105878y_B$$

sostituiamo nella seconda e terza equazione:

$$(1,034342883)x_B + (0,5068262145)y_B = 7,235709764673$$

$$5x_B^2 + 5y_B^2 + 8x_By_B - 87,00105878x_B - 87,00105878y_B + 416,8240145 = 0$$

esplicitiamo y_B

$$y_B = 14,276510484 - 2,040823565 x_B$$

prepariamo la sostituzione:

$$\begin{aligned} -(87,00105878)y_B &= +177,55381098x_B - 1242,07152783 \\ 8x_B y_B &= -16,32658852 x_B^2 + 114,212083875 x_B - \\ 5y_B^2 &= +20,82480412 x_B^2 - 291,358390295 x_B + 1019,09375805 \\ &5 x_B^2 - 87,00105878 x_B + 416,82401441 \\ \hline 9,49821560 x_B^2 - 86,5935542 x_B + 193,8462446 &= 0 \end{aligned}$$

cioè $x_B^2 - 2(4.558411697)x_B + 20,4087012 = 0$

$$x_B = 4,558411697 \pm 0,60861798 \begin{cases} x_B = 5,16702977 \\ x_B = 3,9497935 \end{cases}$$

per moto autorario vale $x_B = 5,16702977$

$$y_B = 14,27651048 - 2,040823565 x_B = y_B = 3,731514359$$

$$z_B = 21,75026470 - 2x_B - 2y_B = z_B = 3,953176432$$

Che riscontrano i valori già calcolati.

(Le ultime cifre, non sempre; a causa degli arrotondamenti, sono precise)

Questo esempio numerico comprova i metodi di calcolo.

Alcune considerazioni sul procedimento nel calcolo della rotazione assi.

Noi abbiamo sviluppato il calcolo con due diverse modalità; La prima considera note le coordinate iniziali del punto P , noti i coseni direttori dell'asse di rotazione, passante per l'origine degli assi, e nota l'ampiezza φ dell'angolo di rotazione. Sono incognite le coordinate del punto a rotazione avvenuta.

Se ruotano gli assi, il punto resta P , con coordinate diverse, se ruota P e gli assi stanno fermi P va in P_1 con diverse coordinate. Affinché le coordinate coincidano; se gli assi ruotano antiorario, P deve ruotare orario, cioè di verso opposto. Questa impostazione ci ha portati alle tre equazioni:

$$\begin{cases} x x_1 + y y_1 + z z_1 = (\overline{ON}^2 + \cos \varphi \overline{NP}^2) = H^2 \\ (\cos \alpha) x_1 + (\cos \beta) y_1 + (\cos \gamma) z_1 = \overline{ON} = (\cos \alpha) x + (\cos \beta) y + (\cos \gamma) z \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

essendo: $\overline{NP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2$ (valori che possiamo calcolare con le coordinate di partenza (note))

Si noti la perfetta simmetria fra le coordinate iniziali e finali e quindi la loro scambiabilità.

per snellezza abbiamo preferito dare l'esempio numerico per la risoluzione delle tre equazioni, cerchiamo ora la risoluzione analitica: (esplicitiamo z_1)

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{z} (H^2 - x x_1 - y y_1)} \quad ; \quad (\cos \delta) z_1 = \frac{\cos \delta}{z} (H^2 - x x_1 - y y_1)$$

$$z_1^2 = \frac{1}{z^2} (H^4 + x^2 x_1^2 + y^2 y_1^2 - 2H^2 x x_1 - 2H^2 y y_1 + 2(xy) x_1 y_1)$$

Sostituendo nelle altre due equazioni

$$(z \cos \alpha - x \cos \delta) x_1 + (z \cos \beta - y \cos \delta) y_1 = [-\cos \delta H^2 + z(\overline{ON})]$$

$$(z^2 + x^2) x_1^2 + (z^2 + y^2) y_1^2 + 2(xy) x_1 y_1 - 2(H^2 x) x_1 - 2(H^2 y) y_1 = [z^2(\overline{OP}^2) - H^4]$$

$$y_1 = \left(\frac{x \cos \delta - z \cos \alpha}{z \cos \beta - y \cos \delta} \right) x_1 + \left(\frac{z(\overline{ON}) - \cos \delta H^2}{z \cos \beta - y \cos \delta} \right)$$

$$K = \left(\frac{x \cos \delta - z \cos \alpha}{z \cos \beta - y \cos \delta} \right) \quad ; \quad L = \left(\frac{z(\overline{ON}) - \cos \delta H^2}{z \cos \beta - y \cos \delta} \right)$$

$$y_1 = K x_1 + L$$

$$y_1^2 = K^2 x_1^2 + L^2 + 2LK x_1$$

$$(z^2 + x^2) x_1^2 = (z^2 + x^2) x_1^2$$

$$(z^2 + y^2) y_1^2 = K^2 (z^2 + y^2) x_1^2 + 2LK(z^2 + y^2) x_1 + L^2(z^2 + y^2)$$

$$2(xy) x_1 y_1 = (2Kxy) x_1^2 + 2L(xy) x_1$$

$$-2(H^2 x) x_1 = -2(H^2 x) x_1$$

$$-2(H^2 y) y_1 = -2(KH^2 y) x_1 - 2H^2 y L$$

$$(+H^4 - z^2 \overline{OP}^2)$$

$$\boxed{(z^2 + K^2 z^2 + x^2 + (Ky)^2 + 2xKy) x_1^2 + 2[KLz^2 + KLy^2 + Lxy - H^2 x - H^2 Ky] x_1 + [L^2 z^2 + L^2 y^2 - 2H^2 y + H^4 - z^2 \overline{OP}^2] = 0}$$

Espressione che può scriversi:

$$\left[Z^2(1+K^2) + (X+KY)^2 \right] X_1^2 + 2 \left[LK(Z^2+Y^2) + LXK - H^2(X+KY) \right] X_1 + \left[Z^2(L^2 - OP^2) - (H^2 - LY)^2 \right] = 0$$

ove si nota che i coefficienti dell'equazione di secondo grado, pur essendo espressi con lettere che sintetizzano altre espressioni in funzione di: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, x, y, z$, sono abbastanza complessi, ed a maggior ragione risulterebbero complesse espressioni esplicite di x_1, y_1, z_1 in funzione degli elementi noti.

Nella seconda modalità di calcolo, oltre le coordinate iniziali di P si sono prese, come elementi noti le rotazioni sequenziali degli assi x, y intorno a z , di $z=z_1$ ed x_1 intorno ad y_1 , ed infine di $y_1=y_2$ e z_2 intorno ad $x_2=x_3$. Ciò permette di utilizzare le formule della rotazione degli assi nel piano.

Siamo così giunti alla terna di equazioni, ove sono esplicitate le coordinate finali del punto, (che allora abbiamo indicato con x_3, y_3, z_3 , avendo riservato: x_1, y_1, z_1 alla rotazione intorno z ed x_2, y_2, z_2 alla successiva rotazione intorno ad y_1) in funzione delle coordinate iniziali x, y, z , e delle tre rotazioni: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, (ampiezze di rotazione). Per calcolare i coseni direttori dell'asse di rotazione risultante.

passante per l'origine; cioè: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \delta$; e l'ampiezza della rotazione risultante: φ , che non figurano nelle suddette equazioni. Si è indicato con A il punto iniziale, con B il punto di arrivo di A, e con C il punto di arrivo di B, con ciò abbiamo tre punti per i quali passa il piano su cui si muove il punto iniziale. La normale al piano per l'origine degli assi è l'asse risultante di rotazione che incontra in N il piano ed $\hat{A}NB = \varphi = \text{ampiezza risultante di rotazione} = \hat{B}NC$.

Notiamo che, indipendentemente dalle coordinate iniziali e finali dei punti dello spazio, quando siano note le ampiezze di rotazione $\alpha_1(z); \alpha_2(y_1); \alpha_3(x_2)$ dovrebbe essere possibile calcolare: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \delta$ dell'asse risultante di rotazione nonché l'ampiezza φ risultante della rotazione.

A tal fine procediamo, passo - passo, nel ricercare l'asse risultante di rotazione e l'ampiezza risultante.

Alla prima rotazione intorno z si ha: l'asse è z

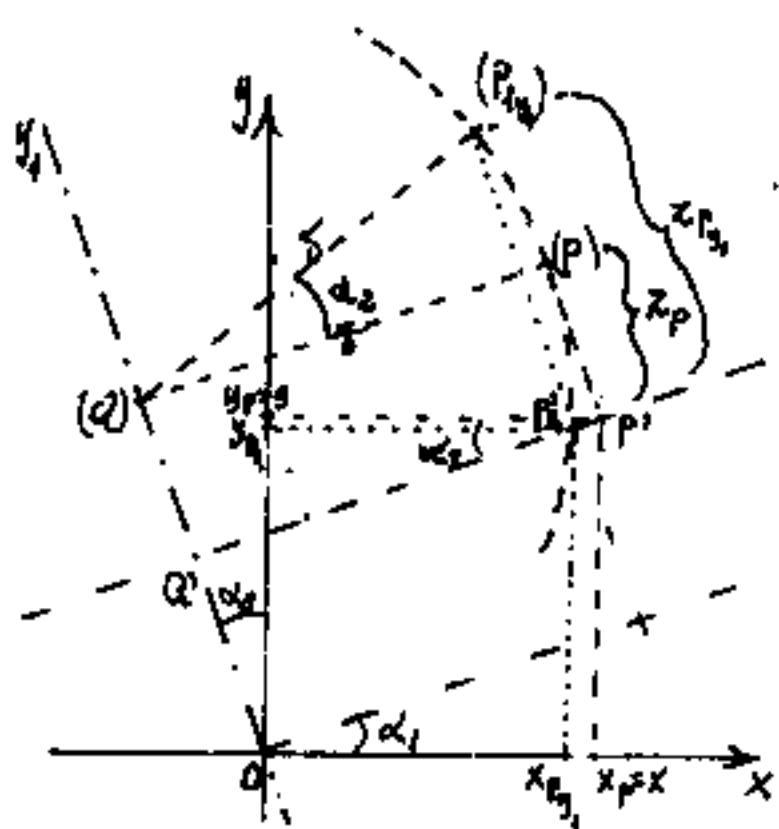
$$\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0 \quad ; \quad \cos \beta = \cos 90^\circ = 0 \quad ; \quad \cos \delta = \cos(0) = 1;$$

$$\varphi_1 = \alpha_1.$$

Alla seconda rotazione intorno ad y_1 , la questione diventa delicata; occorre precisare che l'asse risultante deve essere riferita agli assi iniziali x, y, z ,

La sequenza delle rotazioni

Noi abbiamo considerato di far ruotare gli assi prima intorno a Z poi intorno ad y_1 . (Cio' equivale a tener fissi gli assi e far ruotare il punto, con verso opposto, prima intorno a Z , poi intorno ad y_1). Ora vogliamo invertire la sequenza delle rotazioni, cio' vogliamo prima ruotare intorno ad y_1 , poi intorno a Z . A tal fine consideriamo la proiezione di P su xy cioe' P' , ed $y_1 \equiv (y = \tan \alpha_1 x)$; (la rotazione intorno ad y_1 è ang. α_2). Consideriamo per P un piano perpendicolare ad y_1 , esso sarà parallelo a Z ed avrà la traccia QP' su xy . Ribaltando tale piano, su xy , vediamo $(P) = (P \text{ ribaltata})$ che descrive una circonferenza di raggio: $(P)(Q) = \delta = \text{distanza di } P \text{ da } y_1$. Su tale circonferenza prendiamo l'arco sotteso ad α_2 ed avremo (ribaltata) la posizione di arrivo di P P_{xy} .



Dall'esame del disegno si ha:

$$\overline{PQ} = \delta = \boxed{X \cos \alpha_1 + Y \sin \alpha_1} = (Q)(P_{xy})$$

$$\overline{P_y' P'} = (\delta - \delta \cos \alpha_2) = \delta (1 - \cos \alpha_2)$$

$$(X - X_{P_y}) = (\overline{P_y' P'}) \cos \alpha_1$$

$$(Y - Y_{P_y}) = (\overline{P_y' P'}) \sin \alpha_1$$

Facendo le sostituzioni possiamo esprimere le

coordinate del punto di arrivo P_{y_1} in funzione delle coordinate di partenza, e della ampiezza angolare α_2 , nonché dell'angolo α_1 , che definisce l'asse di rotazione y_1 . Cioè i coseni direttori di y_1 sono:

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ + \alpha_1) = -\sin \alpha_1; \quad \cos \beta = \cos \alpha_1; \quad \cos \gamma = \cos(90^\circ) = 0$$

$$\begin{cases} X_{P_{y_1}} = X - \delta(1 - \cos \alpha_2) \cos \alpha_1 \\ Y_{P_{y_1}} = Y - \delta(1 - \cos \alpha_2) \sin \alpha_1 \\ Z_{P_{y_1}} = Z + \delta(\sin \alpha_2) \end{cases} \quad ; \quad \delta = (X \cos \alpha_1 + Y \sin \alpha_1)$$

$$\begin{cases} X_{P_{y_1}} = X - (X \cos^2 \alpha_1 + Y \sin \alpha_1 \cos \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2) \\ Y_{P_{y_1}} = Y - (X \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + Y \sin^2 \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2) \\ Z_{P_{y_1}} = Z + (X \cos \alpha_1 + Y \sin \alpha_1) \sin \alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{P_{y_1}} = X - X \cos^2 \alpha_1 - Y \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + X \cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2 + Y \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ Y_{P_{y_1}} = Y - X \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - Y \sin^2 \alpha_1 + X \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + Y \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ Z_{P_{y_1}} = Z + X \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + Y \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{P_{y_1}} = X(\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2) + Y(\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) \\ Y_{P_{y_1}} = X(\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + Y(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_2) \\ Z_{P_{y_1}} = X(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2) + Y(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + Z \end{cases}$$

Le formule valgono per rotazione ampia α_2 intorno ad un generico asse del piano xy , passante per "O", ed inclinato di $(90^\circ + \alpha_1)$ rispetto all'asse x .

cioè: $x_{p_{xy}}, y_{p_{xy}}, z_{p_{xy}}$ sono le coordinate nuove, di P se la rotazione avviene sugli assi: $Oxyz$.

Assumiamo ora l'asse z originario come asse di rotazione, (oppure consideriamo P_{xy} che ruota intorno all'asse z .) e la rotazione sia ampia α_1 .

Indichiamo le nuove coordinate con indice: p_{xyz} per indicare che trattasi di una seconda rotazione che è avvenuta prima su y poi su z .

Dalla figura si nota che:

$$x_{p_{xyz}} = x \cos \alpha_2 = (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1) \cos \alpha_2$$

$$x_{p_{xyz}} = x \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_1 \cos \alpha_2$$

se applichiamo le formule della rotazione nel piano, per rotazioni ampie " α ", si ha

$$x_{p_{xyz}} = x_{p_{xy}} \cos \alpha_1 + y_{p_{xy}} \sin \alpha_1$$

e sostituendo:

$$x_{p_{xyz}} = x \left(\cancel{\sin^2 \alpha_1} \cos \alpha_1 + \cos^3 \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) + y \left(\cancel{\sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1} \cos \alpha_2 - \cancel{\sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1} \right) + \\ + x \left(\cancel{\sin^2 \alpha_1} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cancel{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1} \right) + y \left(\cos^2 \alpha_1 \cancel{\sin \alpha_1} + \cancel{\sin^3 \alpha_1} \cos \alpha_2 \right) =$$

$$x_{p_{xyz}} = x \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) + y \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1)$$

essendo: $(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 = 1)$ torna la formula ricavata dalla figura.

analogamente:

$$y_{P_{2y,z}} = y_{P_{1y,z}} \cos \alpha_1 - x_{P_{1y,z}} \sin \alpha_1$$

sostituendo:

$$y_{P_{2y,z}} = x(\cancel{\sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2} - \cancel{\sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1}) + y(\cos^3 \alpha_1 + \cancel{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}) + \\ - x(\cancel{\sin^3 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1}) - y(\cancel{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2} - \cancel{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1})$$

$$y_{P_{2y,z}} = -x(\sin \alpha_1)(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) + y(\cos \alpha_1)(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1)$$

$$y_{P_{2y,z}} = y \cos \alpha_1 - x \sin \alpha_1$$

Verificabile in figura.

Cioè la terna di coordinate di $P_{2y,z}$ risulta:

$$\begin{aligned} x_{P_{2y,z}} &= x(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2) \\ y_{P_{2y,z}} &= y(\cos \alpha_1) - x(\sin \alpha_1) \\ z_{P_{2y,z}} &= x(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + z \end{aligned}$$

Mentre ruotando prima intorno all'asse z e poi ad y ,
avevamo trovato:

$$\begin{cases} x_{P_{2zy}} = x_2 = x(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2) - z \sin \alpha_2 \\ y_{P_{2zy}} = y_2 = y(\cos \alpha_1) - x(\sin \alpha_1) \\ z_{P_{2zy}} = z_2 = x(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + z \cos \alpha_2 \end{cases}$$

Solo: $y_{P_{2zy}} = y_{P_{2y,z}}$; data la diversa modalità di
calcolo le altre coordinate sono diverse.

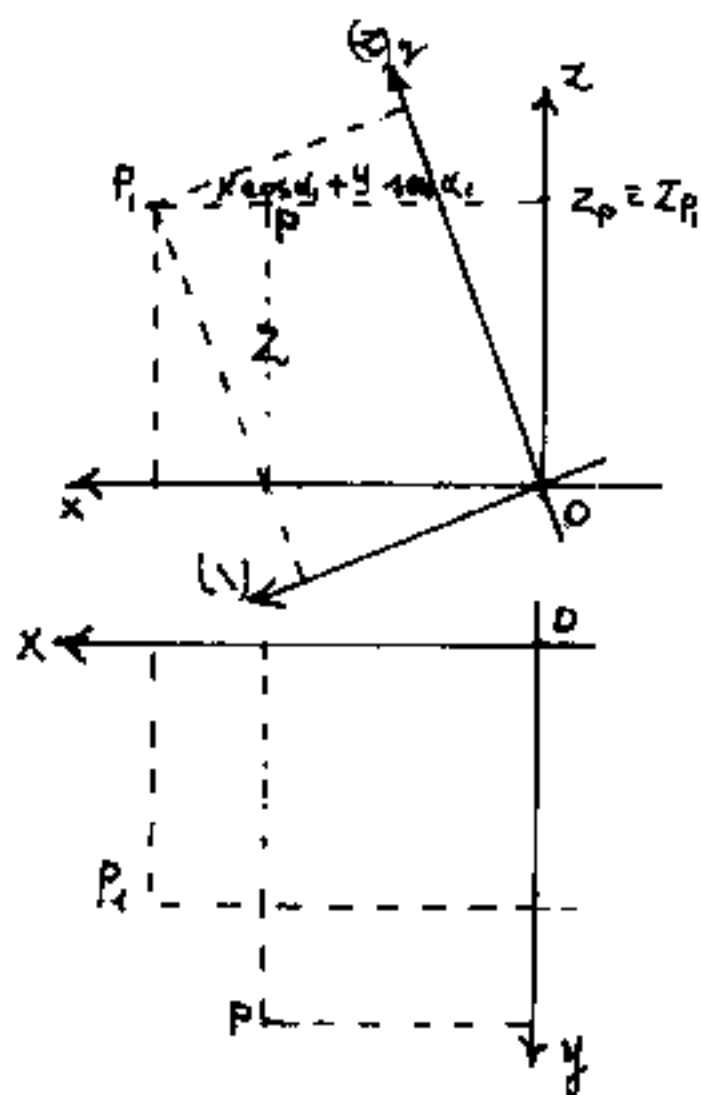
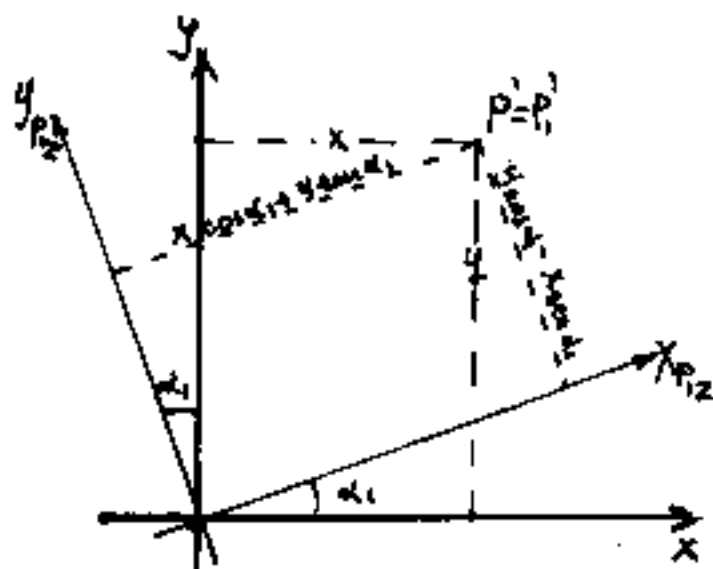
Per chiarirci le idee su questo importantissimo problema, faremo un nuovo calcolo con modalità, ancora diverse.

Noi sappiamo che ruotare gli assi o ruotare il punto, purché l'asse di rotazione sia lo stesso, e l'ampiezza di rotazione sia la stessa, ma di verso opposto, le coordinate finali rispetto alle iniziali sono le stesse.

Consideriamo un punto P riferito agli assi x, y, z e facciamo la rotazione α_2 intorno da y , (non y_1) e la rotazione α_1 intorno a z .

Sappiamo già che:

$$\begin{cases} x_{p,2} = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 \\ y_{p,2} = y \cos \alpha_1 - x \sin \alpha_1 \\ z_{p,2} = z \end{cases}$$



$$\begin{cases} X_{P_{22}y} = (X \cos \alpha_1 + Y \sin \alpha_1) \cos \alpha_2 - Z \sin \alpha_2 \\ Y_{P_{22}y} = Y_{P_{12}} = Y \cos \alpha_1 - X \sin \alpha_1 \\ Z_{P_{22}y} = (X \cos \alpha_1 + Y \sin \alpha_1) \sin \alpha_2 + Z \cos \alpha_2 \end{cases}$$

$$X_{P_{22}y} = X \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + Y \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - Z \sin \alpha_2$$

$$Y_{P_{22}y} = Y \cos \alpha_1 - X \sin \alpha_1$$

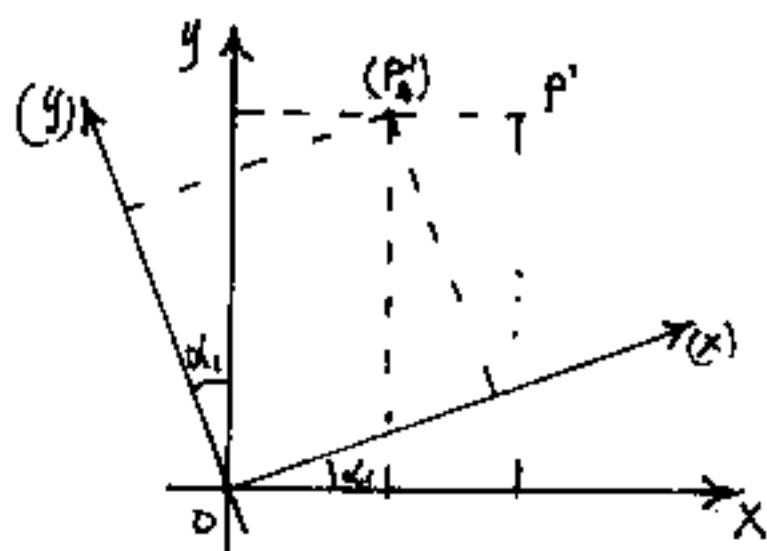
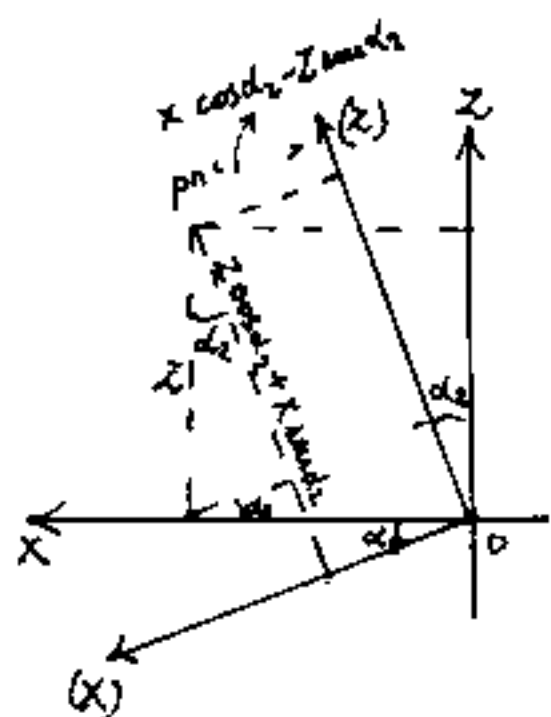
$$Z_{P_{22}y} = X \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + Y \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + Z \cos \alpha_2$$

Che corrispondono esattamente alle x_2, y_2, z_2 .

Invertiamo ora l'ordine di rotazione, cioè ruotiamo prima rispetto ad y (non y_1) e poi rispetto a z avremo: (α_1 rispetto a z ; α_2 rispetto ad y)

$$\begin{cases} X_{P,y} = X \cos \alpha_2 - Z \sin \alpha_2 \\ Y_{P,y} = Y \\ Z_{P,y} = Z \cos \alpha_2 + X \sin \alpha_2 \end{cases}$$

Per maggiore chiarezza facciamo anche i grafici delle rotazioni



$$\begin{cases} X_{P_{212}} = X(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + Y(\sin \alpha_1) - Z(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ Y_{P_{212}} = Y(\cos \alpha_1) - X(\cos \alpha_2 \sin \alpha_1) + Z(\sin \alpha_2 \sin \alpha_1) \\ Z_{P_{212}} = X \sin \alpha_2 + Z \cos \alpha_2 \end{cases}$$

Confrontando questi risultati coi precedenti, si nota che, quando l'asse di rotazione coincide con un asse cartesiano, ed è l'ultima rotazione, la coordinata di quell'asse non è influenzata dall'ampiezza della rotazione:

così: X_3 era indipendente da α_3

$Y_{P_{212}}$ era indipendente da α_2

$Z_{P_{212}}$ è indipendente da α_1

Ciò conferma che il risultato di più rotazioni dipende dalla sequenza con cui sono effettuate le rotazioni stesse.

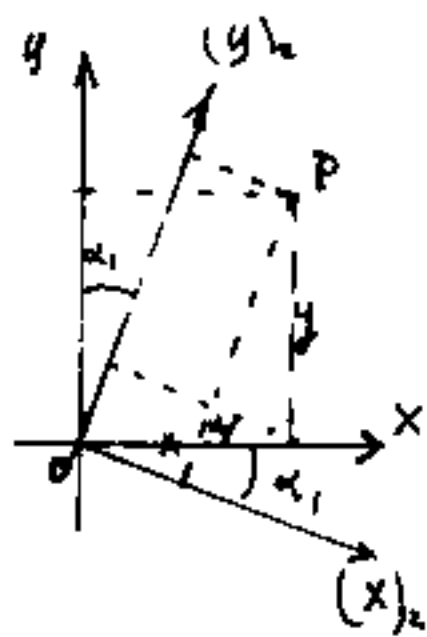
Le due rotazioni i cui risultati corrispondono

$$x_2 = x_{p_2 y} \quad ; \quad y_2 = y_{p_2 z y} \quad ; \quad z_2 = z_{p_2 z y}$$

sono solo apparentemente diverse perché in una si è evidenziata la rotazione degli assi, nell'altra la rotazione del punto.

La rotazione intorno ad y quando non è un asse ruotato, cioè far precedere la rotazione intorno ad y è come aver ruotato rispetto ad una retta qualsiasi anche se tale retta coincide con la posizione assunta da y , quando precede la rotazione intorno z .

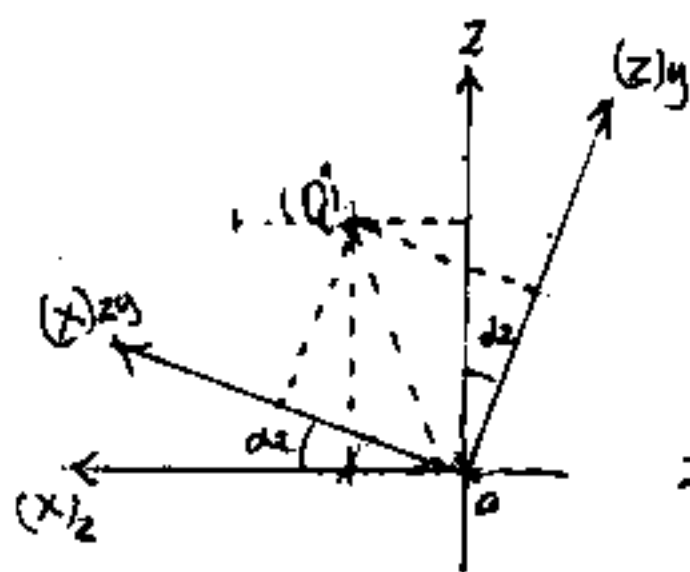
Facciamo ora la rotazione di verso opposto con la stessa sequenza e le stesse ampiezze. Cioè se per rotazione antioraria su z e su y , nell'ordine, P va in $p_2 z y \equiv p_2$, per rotazione oraria P va in $Q_2 z y$



$$z_{Q_{12}} = z$$

$$x_{Q_{12}} = x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1$$

$$y_{Q_{12}} = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1$$



$$x_{Q_{2zy}} = x_{Q_{12}} \cos \alpha_2 + z_{Q_{12}} \sin \alpha_2$$

$$y_{Q_{2zy}} = (x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1)$$

$$z_{Q_{2zy}} = z_{Q_{12}} \cos \alpha_2 - x_{Q_{12}} \sin \alpha_2$$

abbiamo quindi:

$$\begin{cases} X_{Q_{21}y} = X(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - Y(\sin\alpha_1 \cos\alpha_2) + Z \sin\alpha_2 \\ Y_{Q_{21}y} = X(\cos\alpha_1) - Y(\sin\alpha_1) \\ Z_{Q_{21}y} = X(-\cos\alpha_1 \sin\alpha_2) + Y(\sin\alpha_1 \sin\alpha_2) + Z \cos\alpha_2 \end{cases}$$

notiamo però che mentre:

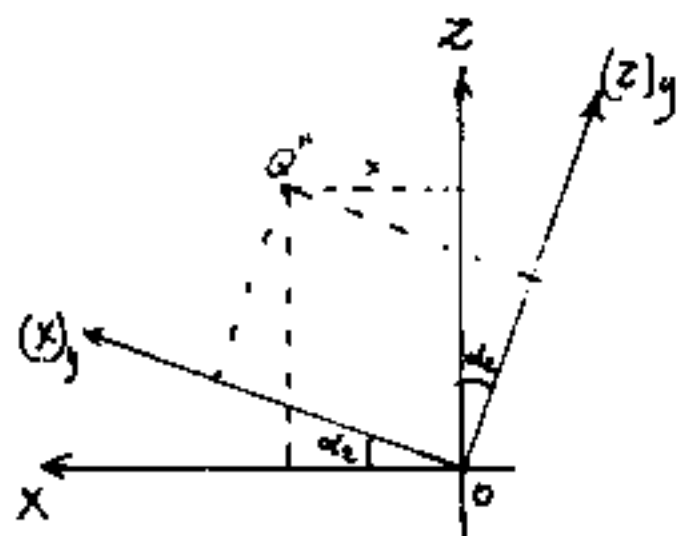
$$X_{P_{21}y}^2 + Y_{P_{21}y}^2 + Z_{P_{21}y}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \overline{OP}^2$$

per queste coordinate:

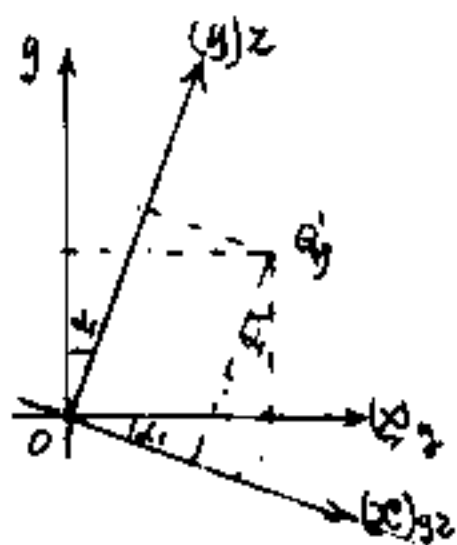
$$X_{Q_{21}y}^2 + Y_{Q_{21}y}^2 + Z_{Q_{21}y}^2 = (X \cos\alpha_1 - Y \sin\alpha_1)^2 + Z^2$$

cioè il punto Q per rotazioni di verso opposto prese nella stessa sequenza, non è equidistante da O come P e $P_{21}y$, cioè ruota su un altro piano.

Invertiamo la sequenza, mantenendo il verso orario.



$$\begin{cases} X_{Q_{1y}} = X \cos\alpha_2 + Z \sin\alpha_2 \\ Y_{Q_{1y}} = Y \\ Z_{Q_{1y}} = Z \cos\alpha_2 - X \sin\alpha_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} X_{Q_{21}z} = X_{Q_{1y}} \cos\alpha_1 - Y_{Q_{1y}} \sin\alpha_1 \\ Y_{Q_{21}z} = X_{Q_{1y}} \sin\alpha_1 + Y_{Q_{1y}} \cos\alpha_1 \\ Z_{Q_{21}z} = -X_{Q_{1y}} \sin\alpha_2 + Z_{Q_{1y}} \cos\alpha_2 \end{cases}$$

sostituendo abbiamo:

$$\begin{cases} X_{Q,yz} = X \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - Y \sin \alpha_1 + Z \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ Y_{Q,yz} = X \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + Y \cos \alpha_1 + Z \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ Z_{Q,yz} = -X \sin \alpha_2 + Z \cos \alpha_2 \end{cases}$$

eleveriamo al quadrato e sommiamo

$$X_{Q,yz}^2 = X^2 \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + Y^2 \sin^2 \alpha_1 + Z^2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 - 2XY \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2XZ \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 - 2YZ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_2$$

$$Y_{Q,yz}^2 = X^2 \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + Y^2 \cos^2 \alpha_1 + Z^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + 2XY \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_2 + 2XZ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 + 2YZ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_2$$

$$Z_{Q,yz}^2 = X^2 \sin^2 \alpha_2 + Z^2 \cos^2 \alpha_2 - 2XZ \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$$

sommando:

$$X^2 (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) \cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 = X^2$$

$$2XZ (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) - 1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_2 = 0$$

$$Y^2 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) = Y^2$$

$$Z^2 (\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2) \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = Z^2$$

Torna il valore $\overline{OP}^2$

Da ciò possiamo dedurre che:

Invertendo la sequenza delle rotazioni rispetto a due assi, equivale a ruotare di verso opposto, con diverso risultato.

(Al fine di ottenere il punto complanare e simmetrico, non solo dobbiamo ruotare di verso opposto, ma anche invertire l'ordine della sequenza delle rotazioni.)

Abbiamo ora le coordinate di tre punti: P, P_{2zy}, Q_{2yz} , equidistanti dal centro assi.

x, y, z .

$$\begin{cases} X_{P_{2zy}} = x \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - z \sin \alpha_2 \\ Y_{P_{2zy}} = -x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 \\ Z_{P_{2zy}} = x \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + y \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{Q_{2yz}} = x \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - y \sin \alpha_1 + z \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ Y_{Q_{2yz}} = x \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + y \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ Z_{Q_{2yz}} = -x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2 \end{cases}$$

è possibile dimostrare che: $\overline{P_{2zy}P} = \overline{PQ_{2yz}}$

Il fatto che $\overline{PO} = \overline{P_{2zy}O} = \overline{Q_{2yz}O}$, vuol dire che i tre punti stanno sulla circonferenza di base di un cono retto che ha per vertice O e per altezza $\overline{ON}$ normale al piano dei tre punti.

Poiché è normale al piano, possiamo applicare Pitagora, perciò $\overline{PO}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{P_{2zy}O}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{Q_{2yz}O}^2 - \overline{ON}^2$ cioè i tre punti sono equidistanti da N cioè: $\overline{P_{2zy}N} = \overline{PN} = \overline{Q_{2yz}N}$, ed essendo uguali i due triangoli isosceli, anche: $\hat{P_{2zy}NP} = \hat{PNQ_{2yz}} = \varphi$

Ciò dimostra che due rotazioni su due assi, possono dare $+\varphi$ e $-\varphi$ se eseguite di verso opposto e inversa sequenza.

Per questi tre punti è possibile far passare il piano:

$$lx + my + nz = -\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \delta.$$

con: l, m, n , proporzionali ai coseni direttori dell'asse di rotazione $\overline{ON}$.

L'equazione del piano è (vedi capitolo pre.)

$$\begin{vmatrix} -1 & y & z \\ -1 & y_{P_2} & z_{P_2} \\ -1 & y_{Q_2} & z_{Q_2} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x & -1 & z \\ x_{P_2} & -1 & z_{P_2} \\ x_{Q_2} & -1 & z_{Q_2} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x & y & -1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & -1 \\ x_{Q_2} & y_{Q_2} & -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} \\ x_{Q_2} & y_{Q_2} & z_{Q_2} \end{vmatrix} = 0$$

La sostituzione e lo sviluppo algebrico porterebbe ad espressioni piuttosto complesse, ed è preferibile risolvere numericamente; $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, e φ come abbiamo già fatto nell'esempio numerico, anche se, in linea di principio è possibile esprimere i coseni direttori dell'asse di rotazione e l'angolazione φ in funzione delle rotazioni sugli assi $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$, conoscendone il verso e la sequenza.

Le quadriche

Dicesi "quadrica" una superficie algebrica del 2° ordine, espressa cioè da una equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44} = 0$$

Poiché tale equazione può essere moltiplicata o divisa per un k arbitrario, solo 9 dei dieci coefficienti sono indipendenti e pertanto occorrono 9 punti per definire la quadrica. Inversamente per 9 punti arbitrari passa una sola quadrica.

Abbiamo già accennato al problema delle quadriche, nel capitolo: "I polinomi di 2° grado in tre variabili", ed abbiamo già trattato la sfera, il cilindro, ed il cono, nonché i solidi di rotazione come il paraboloide rotondo, l'iperboloide ad una falda e a due falde, l'ellissoide di rotazione. Abbiamo anche trattato l'ellissoide (non di rotazione). Abbiamo anche trattato il problema della rotazione degli assi nello spazio.

L'equazione sopra scritta prevede non solo i solidi di cui si è fatto cenno, sia al centro, sia traslati, o ruotati, o solidi di rotazione, ma anche solidi non di rotazione, ed anche quadriche degeneri.

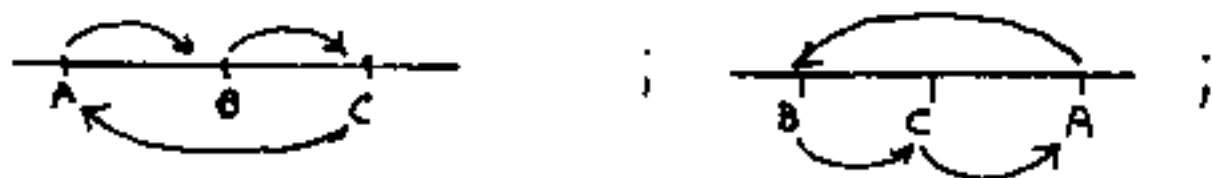
Per trattare compiutamente le quadriche, premettiamo alcuni elementi di geometria proiettiva.

Coordinate proiettive di un punto nello spazio

Intendiamo lo spazio a punti impropri, ad elementi complessi.

Fissiamo nello spazio un tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ ed un punto E esterno alle facce del tetraedro; ad ogni generico punto "P" dello spazio possono attribuirsi quattro numeri: (x_1, x_2, x_3, x_4) finiti; inversamente quattro numeri definiscono un punto. Questi quattro numeri sono detti: Coordinate proiettive omogenee.

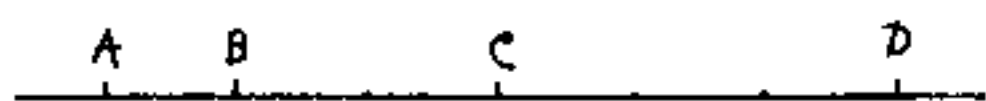
Premesso che una retta può essere percorsa in due versi opposti, il fluire in un verso o nell'altro è un carattere proiettivo. La retta orientata ha un verso positivo e l'opposto negativo, il che implica che il segmento $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$. (è tornato in A) mentre: $\overline{BA} + \overline{AB} = 0$ (è tornato in B). Se sulla retta orientata prendiamo tre punti; A, B, C, qualunque sia la loro sequenza: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$



possiamo anche scrivere: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e tutte le altre correlazioni ricordando che, portare un segmento nell'altro membro dell'uguaglianza, significa cambiare segno, cioè scrivere invertite le lettere che delimitano il segmento stesso. Fra quattro punti abbiamo la relazione di Eulero:

$$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0}$$

È abbastanza istruttivo prendere quattro punti su una retta, misurare la lunghezza dei segmenti, col loro segno, e verificare la relazione di Eulero.

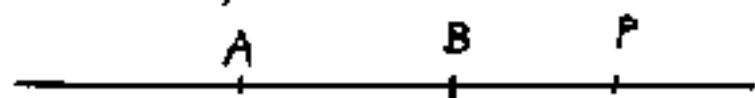


$$(AB)(CD) + (AC)(DB) + (AD)(BC) = 0$$

$$(1)(3) + (3)(-5) + (6)(2) = 3 - 15 + 12 = 0.$$

Abbiamo già visto la "coordinata ascissa" presa sulla retta orientata, sulla quale sia fissata una origine "O", come prima base per le coordinate cartesiane, o come asse reale dei numeri complessi.

Consideriamo ora un segmento $\overline{AB}$ su una retta, ed un punto "P" mobile su di essa; la posizione di "P" può essere univocamente determinata dal rapporto: $\lambda = \overline{AP}/\overline{BP}$ detto rapporto semplice di tre punti allineati.



se consideriamo che A e B si sus-

seguono da sinistra a destra, essendo: $\lim_{P \rightarrow A} (AP/BP) = 0$; $\lim_{P \rightarrow B} (AP/BP) = \pm\infty$,

e per P nel punto improprio della retta: $\lim_{AP \rightarrow \infty} (AP/BP) = 1$; avre-

mo che per P a sinistra di A il rapporto varia per frazioni minori di 1 crescendo da zero ad 1, mentre per P a destra di B, il rapporto varia decrescendo da $+\infty$ a $+1$ (valori maggiori di uno), internamente ad AB, per valori negativi da 0 a $-\infty$.

La retta assume l'aspetto di un arco di raggio infinito, sulla

quale possono riportarsi tutti i valori dei numeri relativi.
(quando il raggio infinito, la curvatura è zero, cioè
l'anello è rettilineo). Si noti che: "-1" è nel punto
di mezzo di AB. Riaffiora qui la questione dello zero,
dell'uno, e dell'infinito, che abbiamo già trattata nel
problema dell'ordine degli infiniti e degli infinitesimi.
Nel graduare la retta "asse reale", fissata una
origine, ed una unità grafica "costante"; si nota
che le due semirette a destra ed a sinistra di "0" sono
uguali, cioè ad ogni numero positivo corrisponde un
numero negativo (segmenti equidistanti da "0"), che i
numeri fra zero ed uno sono tutti compresi nella
unità grafica; che l'unità grafica aggiunta al
segmento che rappresenta un intero, forma il segmento
dell'intero successivo. Però se diciamo che ad ogni
numero maggiore di uno, corrisponde il suo reciproco,
che è un numero minore di uno, affermiamo che
la quantità di numeri maggiori di uno è uguale
alla quantità di numeri minori di uno, sono
entrambi infiniti e quindi debbono occupare
lo stesso spazio. Ciò è quanto avviene sulla nostra
retta ove a sinistra di A sono i numeri minori di 1
ed a destra di B i numeri maggiori di 1, mentre

i numeri negativi sono tutti nel segmento arbitrario, (ed in ciò convenzionale) $\overline{AB}$.

Sia sull'asse reale, sia su questa retta, vi è la corrispondenza biunivoca: Punto $\leftrightarrow$ numero, per cui anche in questo caso si può parlare di coordinata del punto.

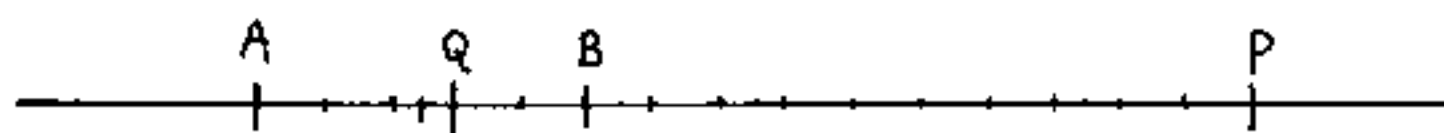
Se sull'asse reale prendiamo le coordinate ascisse x_A, x_B ed x per indicare l'ascissa di P avremo:

$$\boxed{\frac{(x - x_A)}{(x - x_B)} = \lambda} \quad \text{ed anche:} \quad \boxed{x = \frac{(x_A - \lambda x_B)}{(1 - \lambda)}}$$

Che sono le formule per il passaggio da un sistema di coordinate all'altro e viceversa.

Facciamo ora un altro passo in avanti, e consideriamo oltre A, B, P , un quarto punto che indichiamo con Q , mentre P si considera esterno al segmento AB (cioè a P corrisponde un λ_P positivo), il punto Q si consideri interno al segmento AB (cioè a Q corrisponde un λ_Q negativo). Volendo far corrispondere ad ogni numero positivo, un numero negativo e viceversa, cioè volendo far corrispondere agli infiniti punti delle due semirette a sinistra di A ed a destra di B (indefinitamente grandi) gli infiniti punti del segmento finito $\overline{AB}$, basta porre: $|\lambda_P| = |\lambda_Q|$, cioè uguagliare in valore

assoluto, i rapporti semplici dei tre punti allineati (ABP) ed (ABQ). Quando ciò si verifica, cioè quando $| \lambda_P | = | \lambda_Q |$, noi diciamo che i quattro punti ABPQ formano un "gruppo armonico". Notando che i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$, non sono separati, ma si intersecano fra loro, si suole anche dire che la coppia di punti (PQ) separa armonicamente la coppia (AB), od anche che le distanze di uno dei punti dai restanti tre, forma una "progressione armonica".



i rapporti semplici:

$$\frac{BP}{AP} = \frac{QB}{AQ} \Rightarrow \frac{AP - AB}{AP} = \frac{AB - AQ}{AQ}$$

cioè: $\left(1 - \frac{AB}{AP}\right) = \left(\frac{AB}{AQ} - 1\right)$ ed anche: $2 = AB \left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}\right)$

$$\boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}}$$

Abbiamo così ricavato una classica relazione dei gruppi armonici.

Quando due coppie di punti si separano armonicamente gli elementi di una coppia si dicono "coniugati armonici" rispetto a quelli dell'altra.

Nel nostro caso Q è coniugato armonico di P rispetto alla coppia $\overline{AB}$. Attenzione però, dati quattro punti come i nostri: $ABPQ$, non possiamo fare gruppi armonici utilizzando le coppie AQ e $\overline{BP}$ perché non si intersecano, come non possiamo fare le coppie $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ perché una interna all'altra non si intersecano; quindi le uniche coppie che si intersecano sono $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$, ma non basta, per essere un gruppo armonico si deve verificare che

$$\frac{AP}{BP} = -\frac{AQ}{BQ} = \frac{AQ}{QB}.$$

Il punto improprio della retta è coniugato armonico del punto medio di AB .

Birapporti

Dati quattro punti propri o impropri di una retta, e siano nell'ordine $ABCD$ diciasi: birapporto, o doppio rapporto, o rapporto armonico, il rapporto dei rapporti semplici di tre punti allineati e cioè:

$$(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{\lambda_c}{\lambda_d}$$

Osserviamo che in questa notazione abbiamo preso C al posto di P , e D al posto di Q , perché i nuovi quattro punti possono avere: $\frac{\lambda_c}{\lambda_d} \neq -1$.

Il birapporto non cambia se scambiando fra loro due elementi qualsiasi si scambiano anche gli altri due: $(ABCD) = (DCBA) = (BADC) = (CDAB) = K$.

$$(ABDC) = (CDBA) = (BACD) = (DCAB) = \frac{1}{K}$$

$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-K}$$

$$(ACBD) = (DBCA) = (CADB) = (BDAC) = 1-K$$

$$(ADCB) = (BCDA) = (DABC) = (CBAD) = \frac{K}{K-1}$$

$$(ADBC) = (CBDA) = (DACB) = (BCAD) = \frac{K-1}{K}$$

Cioè delle 24 permutazioni ($4!$) possibili, solo 6 valori, del birapporto che rappresentano, sono diversi fra loro; mentre vi sono quattro possibili birapporti che hanno lo stesso valore.

Se K è un valore comune a quattro birapporti i sei valori diversi sono:

$$K; 1-K; \frac{1}{K}; \frac{1}{1-K}; \frac{K}{K-1}; \frac{K-1}{K}$$

Le differenziazioni consistono nel reciproco e nel complementare all'unità; infatti $\left(\frac{K-1}{K}\right) = \left(1 - \frac{1}{K}\right)$ e $\frac{K}{K-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{K}\right)}$ che è il reciproco del precedente.

Se facciamo: $[1 - (1-K)]$, tornerebbe " K ", ed anche: $\frac{1}{\frac{1}{K}} = K$;

ed $\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{1-K}\right)}\right) = K$ si hanno, comprendendo K , quattro valori uguali. Fanno eccezione le seguenti quaterne:

- quaterna con punto doppio ove si hanno solo tre valori $0, 1, \infty$ (si ricordi $\lim_{P \rightarrow A}$; $\lim_{P \rightarrow B}$; $\lim_{P \rightarrow \infty}$)
- quaterna armonica, il cui birapporto vale (-1) (si ricordi $\lambda_p = -\lambda_q$)
- quaterna equiarmonica, ove i valori distinti del birapporto sono le due radici cubiche complesse dell'unità negativa, cioè: $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$; $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$; (non comprende -1). La quaterna equiarmonica si ha quando il birapporto è formato da numeri complessi.

Finalmente possiamo definire le coordinate proiettive sulla retta

Fissati sulla retta tre punti distinti A_1, A_2, E , ogni punto P determina un birapporto $(A_1, A_2, E, P) = K$ che varia al variare della posizione di P ; il valore di questo birapporto è detta coordinata proiettiva di P sulla retta.

I punti A_1, A_2, E sono fissi, A_1, A_2 , detti punti fondamentali con E costituiscono il sistema di riferimento, le loro coordinate sono: $\infty, 0$; mentre E ha per coordinata 1 ed è detto punto unità.

Nel rapporto semplice di tre punti allineati:

(ABP) , quando P cade nel punto medio di AB , abbiamo visto che il rapporto: $(ABP) = -1$, tale valore è anche detto coordinata baricentrica di P , (essendo il baricentro di $\overline{AB}$ il suo punto medio)

Analogamente le coordinate proiettive si riducono a coordinate baricentriche quando E cade nel punto medio del segmento finito $\overline{A_1A_2}$.

Se invece uno dei due punti, su es. A_1 è il punto improprio della retta, ed il segmento finito $\overline{A_2E} = 1$, le coordinate proiettive, diventano coordinate ascisse col verso positivo: $\overline{A_2E} = +1$ con $A_2 = 0$ punto origine. (si ricordi che il punto improprio di una retta è agli estremi a destra e sinistra rispetto all'origine sulla stessa retta.) cioè le semirette $\overline{A_2A_1}$ sono due, una a destra ed una a sinistra di A_2 , cioè il segmento A_2A_1 potrebbe scriversi $A_1A_2A_1$ è indefinito.

Se: x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate proiettive di 4 punti su una retta, il loro birapporto equivale al birapporto dei 4 punti, qualunque sia il sistema di riferimento

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)}$$

Dati due sistemi di coordinate proiettive x ed x' per uno stesso punto P si ha la relazione:

$$\boxed{x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \quad (\text{con } (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0)$$

relazione che può scriversi:

$$\boxed{\gamma x x' - \alpha x + \delta x' - \beta = 0}$$

od anche:

$$\boxed{a x x' + b x + c x' + d = 0}$$

Proiettività fra rette

Riprendiamo da B. Segre: (Enciclopedia, op. cit. cap. XXXIV pag. 158)

"Dicesi Collineazione (A.F. Möbius), o proiettività (J.V. Poncelet; J. Steiner) od anche omografia (M. Charles) una corrispondenza biunivoca fra i punti di due rette distinte o sovrapposte, che sempre associ a 4 punti dell'una 4 punti dell'altra collo stesso birapporto."

Dalla correlazione di cui sopra fra x' ed x , si rileva che bastano le coordinate di tre punti nei due sistemi per calcolare tre coefficienti indipendenti per es. $\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\delta}{\beta}; \frac{\gamma}{\beta}$ od anche: $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$.

Nel caso delle due rette i tre punti dell'una sono gli omologhi dell'altra, e le correlazioni sopra scritte sono la corrispondenza proiettiva fra le due punteggiate (rette).

Quando le due rette punteggiate proiettive sono sovrapposte, gli elementi omologhi, se coincidenti si dicono: elemento doppio, o elemento unito.

Se l'elemento di una retta ha per omologo un elemento di cui è omologo, i due elementi si dicono: in doppio modo corrispondenti. (sono l'omologo dell'omologo)

La formula che relaziona x con x' , nel caso di rette sovrapposte, diventa l'equazione di 2° grado:

$$ax^2 + (b+c)x + d = 0$$

Se fra le due rette punteggiate proiettive vi sono tre o più elementi uniti, vuol dire che tutti gli elementi sono uniti, in tal caso la proiettività si dice: "identità".

Se invece tutti gli elementi si corrispondono in doppio modo, si dice che la proiettività ha carattere involutorio, è una involutione. (Quando non sia ancora una identità)

Condizione necessaria e sufficiente perché una proiettività sia una involuzione, è che nelle relazioni sopra esposte si abbia: $(b=c)$.

Cioè le relazioni diventano:

(per rette non sovrapposte): $axx' + b(x+x') + d = 0$

(per rette sovrapposte) $ax^2 + 2bx + d = 0$

Geometricamente, affinché una proiettività fra rette punteggiate sovrapposte sia una involutione, occorre e basta che abbia due elementi omologhi distinti che si corrispondono in doppio modo.

Inversamente dando due coppie di elementi omologhi che si corrispondono in doppio modo, si individua una sola involuzione.

Nelle rette sovrapposte, gli elementi uniti possono essere meno di tre, (cioè si esclude l'identità), essi possono essere: 2 (due) $\rightarrow$ la proiettività si dice iperbolica

" : 1 (uno) $\rightarrow$ " " parabolica

" : 0 (zero) $\rightarrow$ " " ellittica

In una proiettività iperbolica, due elementi omologhi formano coi due elementi uniti, un birapporto costante che dicesi: Caratteristica della proiettività.

Nel caso di involutione individuata da due coppie di elementi omologhi che si corrispondono in doppio modo, la proiettività potrà essere ellittica o iperbolica, non potrà essere parabolica.

In una involuzione iperbolica, le varie coppie di elementi omologhi, separano armonicamente la coppia degli elementi uniti, ossia il birapporto, caratteristica della proiettività è costante ed è (-1) .

Coordinate omogenee

Abbiasi una retta punteggiata proiettiva il cui sistema di coordinate sia (X) , esprimiamo il valore x mediante il rapporto di due numeri finiti x_1 ed x_2 , eioè: $x = x_1/x_2$. Un siffatto giochino, viene proposto perchè mentre lo zero viene considerato un numero, il valore indefinito di ∞ non viene considerato numero, quindi per far annunziare alla x anche il valore infinito basta che x_2 sia zero! Abbiamo già espresso altrove il nostro pensiero se lo zero e l'infinito, siano da considerarsi numeri.

I due numeri x_1 ed x_2 vengono dette:

"Le coordinate proiettive omogenee di P "

Volendo esprimere in coordinate omogenee la trasformazione: $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ fra due sistemi di coordinate proiettive avremo

$$\begin{cases} x'_1 = K(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ x'_2 = K(\gamma x_1 + \delta x_2) \end{cases}$$

ove K è un fattore arbitrario. e $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

Il discorso sulle coordinate omogenee, esposto in questi termini, è poco convincente anche se effettuato da famosi autori. Noi preferiamo riguardare le coordinate omogenee

da un altro punto di vista.

Consideriamo un qualsiasi polinomio di grado n in m variabili, e cerchiamo che ogni elemento del polinomio sia dimensionalmente omogeneo, poiché nel polinomio figura anche un numero, (talvolta detto termine noto), affinché questo numero sia dimensionalmente omogeneo con gli altri addendi, lo facciamo rappresentare da una x_{m+1} . Per esempio l'equazione di una retta:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$$

se x_1 ed x_2 sono lunghezze deve esserlo anche a_3

perciò $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ sarà l'equaz. omogenea.

Per una conica:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 + 2a_{23} x_2 + a_{33} = 0$$

Ove, se le x sono lunghezze, i primi due termini sono lunghezze al quadrato; resa omogenea diventa:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0$$

sono ancora gli stessi sei termini resi omogenei.

(in forma sintetica:)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{i=3} a_{ij} x_i x_j$$

Per una quadrica, in forma sintetica:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{i=4} a_{ij} x_i x_j$$

In generale un polinomio di 2° grado in m variabili, in forma omogenea è esprimibile con:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{m+1} a_{ij} x_i x_j$$

Un polinomio di grado " n " in " m " variabili:

(in forma omogenea
sintetica)

$$\sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=1 \\ \vdots \\ i_m=1}}^{m+1} (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m})$$

I punti impropri e le rette improprie

Cerchiamo di familiarizzarci meglio con la retta che abbiamo considerata chiusa come un anello di cui un punto è improprio.

Se consideriamo la retta impropria:

$$(a+ib)x + (c+id)y + (m+i\infty) = 0$$

i cui coefficienti sono numeri complessi, possiamo scrivere:

$$(ax+cy+m) + i(bx+dy+n) = 0$$

ma i coefficienti di un numero complesso sono reali perciò il sistema: $\begin{cases} ax+cy+m=0 \\ bx+dy+n=0 \end{cases}$ darà le coordinate del punto reale della retta impropria.

Quindi per ogni punto reale passa un fascio di rette improprie alle quali possiamo attribuire caratteristiche impossibili in campo reale.

Un esempio classico è quello di due rette passanti per l'origine, che siano contemporaneamente parallele e perpendicolari.

L'equazione di due rette per l'origine è:

$$\boxed{y = mx} \quad ; \quad \boxed{y = m_1 x}$$

Condizione di parallelismo: $m = m_1$

Condizione di perpendicolarità: $m = \frac{-1}{m_1}$

cioè: $mm_1 = -1$; ed anche:

$$\boxed{m^2 = -1}$$

$$\boxed{m = \pm i}$$

perciò le rette:

$$\boxed{y + ix = 0}$$

$$\text{ed } \boxed{y - ix = 0}$$

risolvono il problema, e ciò si verifica per tutti i punti dello spazio, basta considerare le loro parallele:

$$\boxed{y = ix + K}$$

$$\boxed{y = -ix + K}$$

Sono due rette immaginarie coniugate e nel fascio passante per "P" (punto arbitrario dello spazio) sono dette rette isotrope passanti per P.

Due rette che siano, ad un tempo, parallele, e perpendicolari fra loro, non deve poi meravigliarsi.

gliarci troppo, trattandosi di rette improprie, che hanno solo un punto reale; in quel punto si sovrappongono, ma anche i punti restanti, che sono all'infinito, ove le distanze non hanno senso, possono pensarsi sia distaccati sia sovrapposti.

Abbiamo assimilato le rette ad quelli di raggio infinitamente grande; se le rette sono reali, esse si richiudono sul "punto improprio"; se le rette sono improprie, si richiudono su un punto reale.

Per farsi un modello mentale, consideriamo le due rette isotrope, come due meridiani che al polo si incontrano perpendicolarmente, non solo a livello equatoriale hanno segmenti paralleli, ma, in dipendenza della latitudine, i segmenti dei due meridiani possono fare un angolo qualsiasi fra 0 e 90°. Però questo esempio non è lecito, perché attribuiremmo che all'infinito ha senso il parallelismo e la perpendicolarità, che invece ha senso in quell'unico punto reale privo di dimensioni, ove non è distinguibile se le rette vi provengono da direzioni diverse.

Per esempio: se $m = \tan(\alpha)$ ed $m_1 = \tan(2\alpha) = \frac{2m}{1-m^2}$
per: $m' = \frac{2m}{1-m^2}$, cioè: $1-m^2 = 2$; da cui: $m = \pm\sqrt{-1} = \pm i$
e tornano le stesse rette isotrope.

Omologia

Si può considerare l'omologia una omografia che si verifica su piani sovrapposti. Le due parole derivano dal greco ove "homós" significa: "uguale", "lógos" significa "discorso", "gráphēn" significa "scrittura". Omotetia da "nomos" = "uguale" e "thetós" = posizione, o collocazione; Collineazione dal latino "cum" = "insieme" nel senso di accompagnamento, (non nel senso molteplicità di elementi, da cui la teoria degli insiemi) e "linea", cioè "collineazione" equivale a collegamento proiettivo fra linee (rette).

Abbiamo speso qualche parola sul significato di questi termini, perché usati tal volta in modo improprio, rimandando alla applicazione pratica il loro vero contenuto di informazione.

Si dice omologia o corrispondenza omologica fra due piani sovrapposti quando i punti di un piano ed i punti dell'altro sono in una corrispondenza biunivoca tale che se un punto descrive una retta, anche l'altro descrive una retta, esiste un' axe dell'omologia tutta costituita di punti uniti, ed un centro dell'omologia punto comune delle rette unite.

Dati due punti corrispondenti A ed A' , noto il centro S dell'omologia ed il punto C comune alla retta AA' ed all'asse dell'omologia, il birapporto $(AA'SC)$ non varia al variare della coppia AA' .

Inversamente il birapporto consente di determinare A' per ogni A , essendo $AA'S$ allineati ed è detto: invariante assoluto o caratteristica dell'omologia.

Se questo birapporto è (-1) , l'omologia si dice: armonica o involutoria.

Se il centro S è improprio, mentre l'asse è una retta reale, l'omologia è detta: "affine", si ha cioè affinità omologica, e si verificano tre casi: 1/ la direzione di S_∞ è quella dell'asse, e l'omologia affine è detta: speciale.

2/ la direzione di S_∞ è normale all'asse, e l'omologia affine è detta normale.

3/ la direzione di S_∞ è obliqua all'asse e l'omologia affine è detta obliqua.

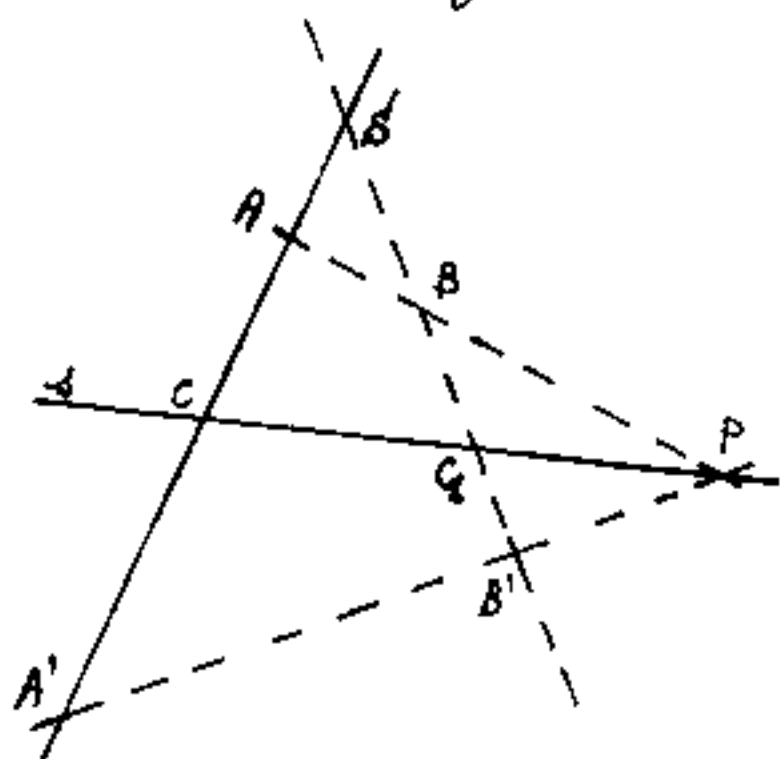
- Se l'asse è improprio mentre il centro è proprio si ha l'omotetia.

- Se il centro e l'asse sono impropri si ha una congruenza, o equipollenza, (uguaglianza).

Facciamo qualche esempio.

ESEMPIO

Di una omologia sono dati: l'asse s , il centro S , ed una coppia di elementi corrispondenti A ed A' , (necessariamente allineati con S per essere corrispondenti).
Dato un punto B trovare il corrispondente B' in quella omologia.



Uniamo S, A, A' per verificare che siano allineati e si determina il punto "C".

Unito A con B , si trova su s il punto P .

Uniti P con A' e B con S , per

intersezione si determina il punto B' e C_1 su s .

$$(A'ASC) = \frac{\overline{A'S} / \overline{AS}}{\overline{A'C} / \overline{AC}} = \frac{5/1}{2,5/1,5} = (-3) = \text{caratteristica}$$

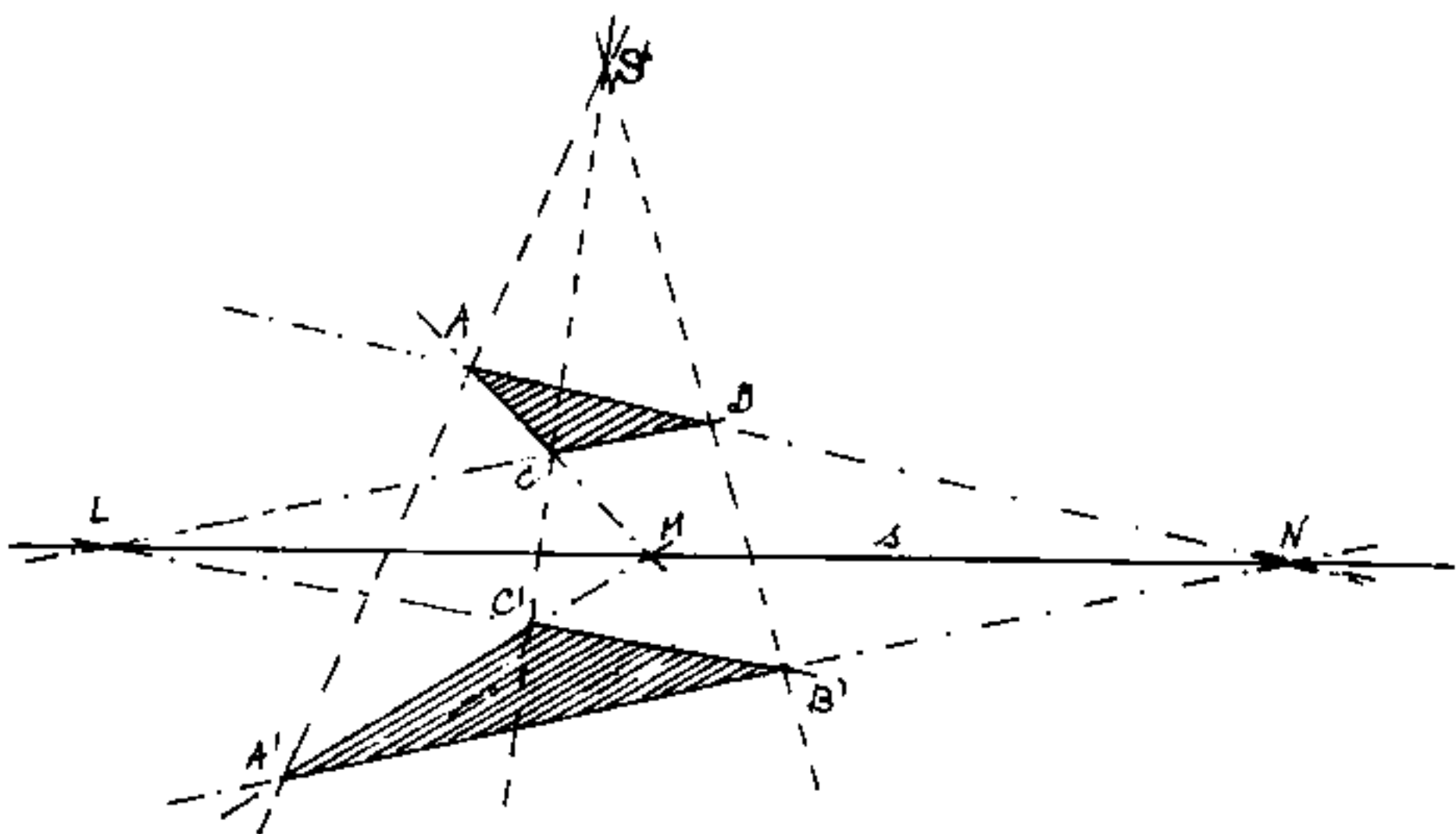
verifichiamo che la caratteristica dell'omologia, ossia l'invariante assoluto è rimasto lo stesso per la coppia

$$B, B' : (B'BS C_1) = \frac{\overline{B'S} / \overline{BS}}{\overline{B'C_1} / \overline{BC_1}} = \frac{3,5/1,5}{1,14/(-0,88F)} = -3$$

Questa costruzione ci avverte che date due coppie di punti corrispondenti, è facile, graficamente, trovare il centro S ed il punto P , ma resta indefinito l'asse che deve passare per P ; con infinite, possibili, inclinazioni diverse.

I triangoli omologici

Date tre coppie di punti corrispondenti di una stessa omologia, cioè AA' , BB' , CC' allineate con "S", è possibile trovare l'axe "s" dell'omologia

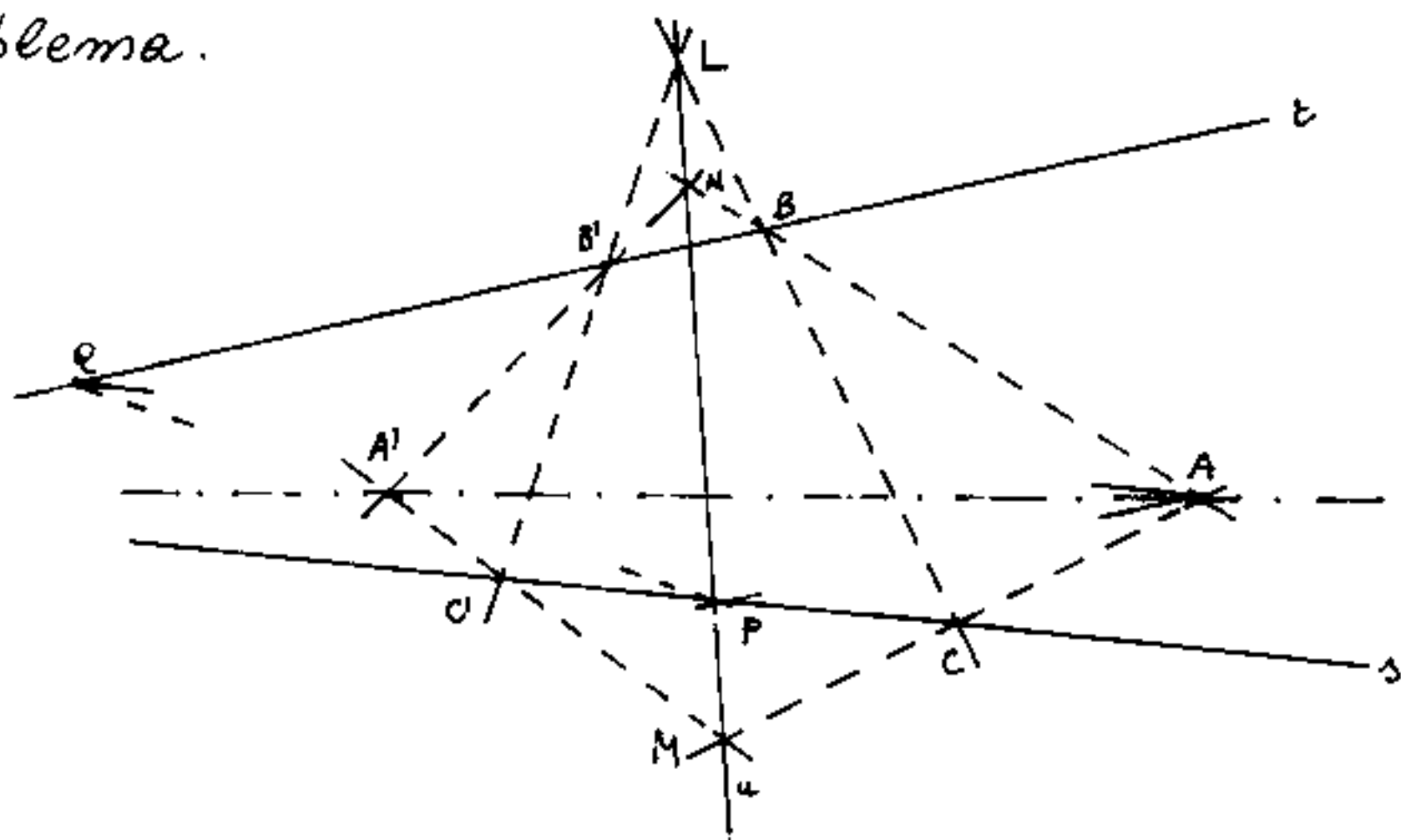


unendo i punti omologici: AB ed $A'B'$ che si incontrano in N ; AC ed $A'C'$ che si incontrano in M ; BC ed $B'C'$ che si incontrano in L . L, M, N debbono risultare allineati e definiscono s . (Teorema di Desargues)

I due triangoli ABC ed $A'B'C'$, sono detti: triangoli omologici. (Non sono simili in genere)

Si possono utilizzare i triangoli omologici per congiungere un punto A col punto comune a due rette che rimane fuori del foglio del disegno. Sono quindi date le rette r ed s , ed

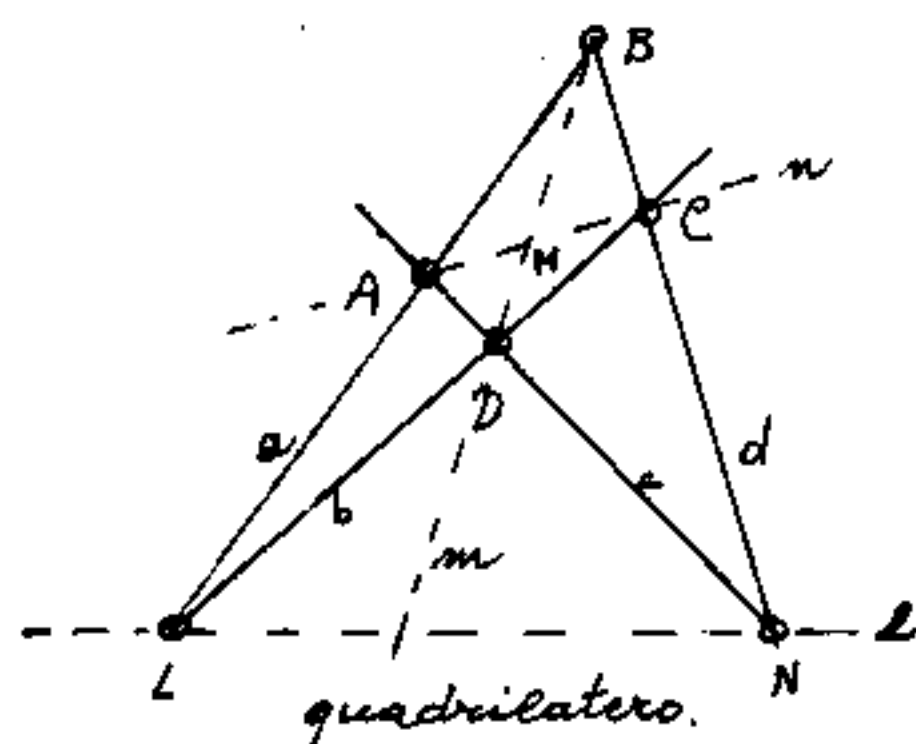
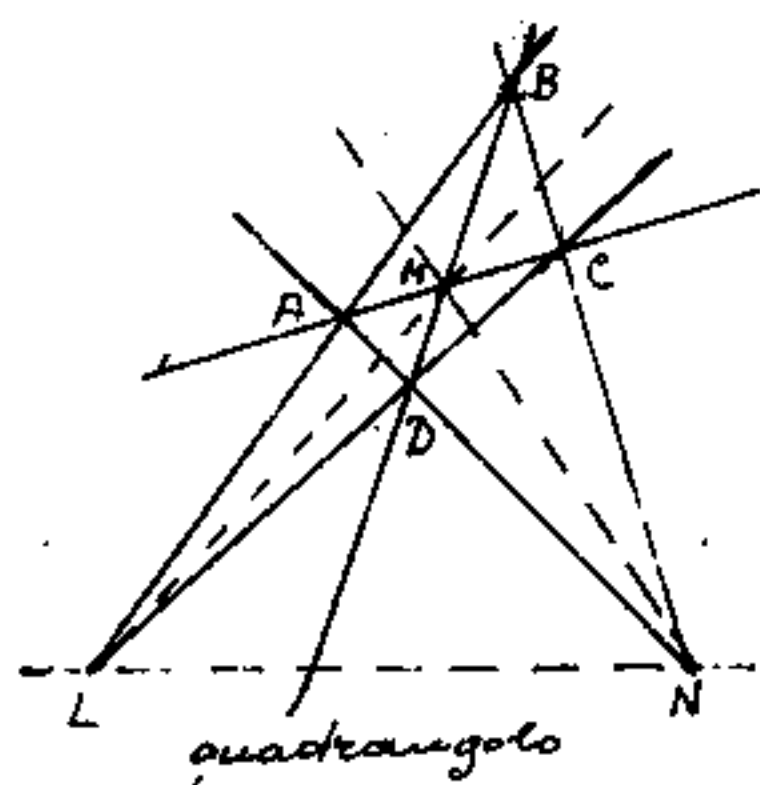
ed il punto A fuori di esse; se prendiamo due coppie arbitrarie di punti corrispondenti, per esempio B e B' su r ed c e c' su s , potremo trovare il punto comune L ai lati $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, poiché sono infinite le omologie che possono correlare due coppie arbitrarie, per L possiamo tracciare una retta qualsiasi, sulla quale i lati AC ed AB individueranno i punti M ed N che uniti con c' ed B' , daranno per intersezione il punto A' . La retta AA' risolve il problema.



Questo problema è risolto in modo molto più snello: se da A tracciamo le parallele ad r e s che incontreranno s ed r nei punti P e Q , il punto medio di $\overline{PQ}$ unito con A dà la retta richiesta.

Quadrangoli e quadrilateri completi

Dati quattro punti A, B, C, D dei quali nessuna ternà sia allineata, dicesi quadrangolo completo l'insieme delle sei rette che a due a due li congiungono. Dicesi invece quadrilatero completo la figura piana che dualmente è costituita da quattro rette



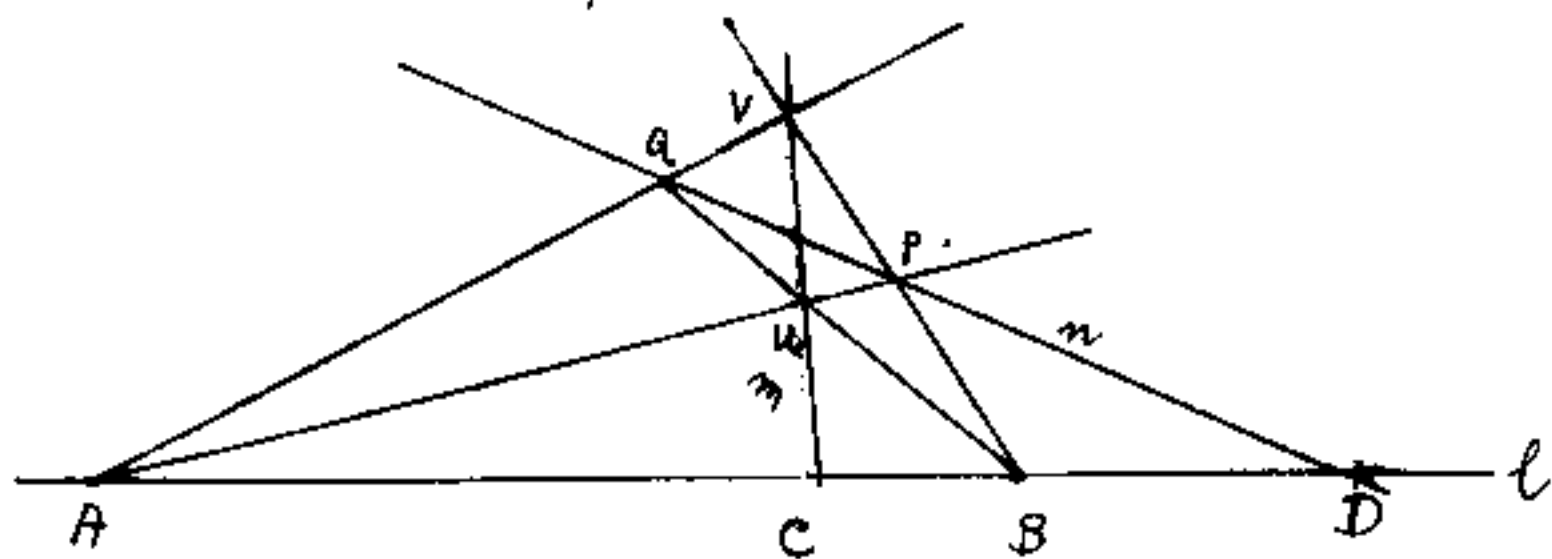
a, b, c, d , di cui nessuna ternà passi per lo stesso punto, e dai 6 vertici comuni alle rette prese due a due. Le tre rette: l, m, n , congiungenti i vertici opposti del quadrilatero completo (rette diagonali) costituiscono il trilatero diagonale.

Due lati si dicono opposti se non passano per lo stesso vertice intendendo per vertici i punti A, B, C, D , perciò sono lati opposti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, punto comune a due lati opposti è detto punto diagonale sono punti diagonali L, M, N e sono solo tre.

Sulla retta che unisce due punti diagonali, vi sono altri due punti determinati dalla intersezione dei lati uscenti dal terzo punto diagonale. Sono due coppie che si separano armonicamente. Dualmente, nel quadrilatero completo, due rette diagonali intersecano la terza retta diagonale separando armonicamente la coppia di vertici opposti.

Queste proprietà consentono la costruzione
di un gruppo armonico.

Se $(ABCD)$ è un gruppo armonico (ricordiamo che si ha un gruppo armonico quando sono uguali, in valore assoluto, essendo di segno opposto, i rapporti semplici (ABE) ed (ABD) od anche il birapporto $(ABCD) = -1$, cioè $(ABCD)$ è detta anche quaterna armonica) e poniamo $ABCD$ su una retta diagonale per esempio la "l", poniamo costruire infiniti quadri laterali completi su di essa. Inversamente dati ABC è possibile trovare D , sapendo che AB e CD sono le coppie.



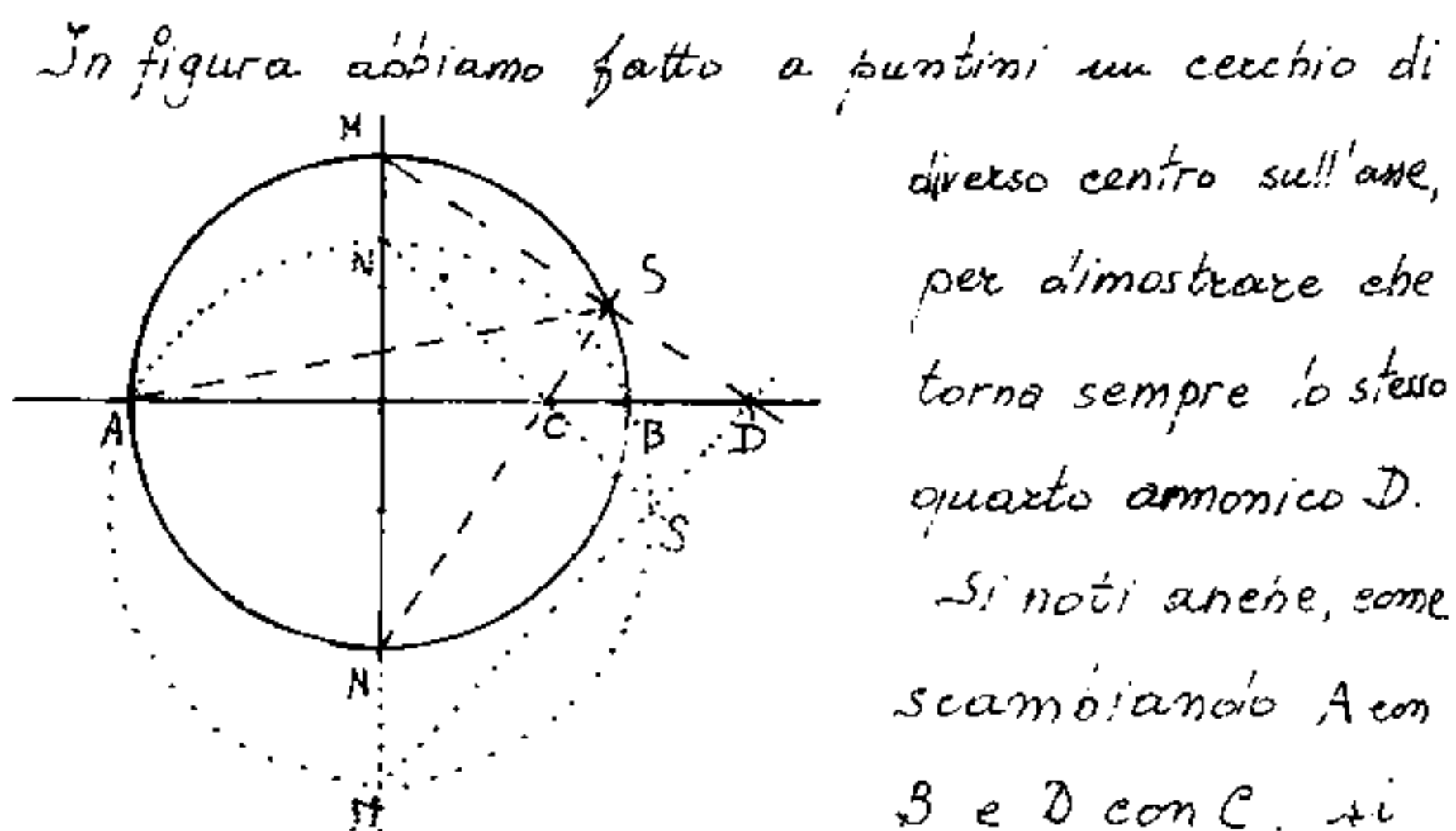
La costruzione del quarto armonico D , dati 3 punti: ABC , presenta vari elementi arbitrari, che portano a quadrilateri diversi, ma il punto D rimane invariato per ogni terna (ABC) sapendo che AB sono vertici mentre le rette per C e D sono diagonali. Il rapporto semplice di tre punti allineati $(ABC) = AB/BC$ è negativo se C è intermedio ad $\overline{AB}$, perciò ad ogni C interno alla coppia AB , corrisponde uno, ed un solo quarto armonico D , esterno alla coppia. (Viceversa se C è esterno, D è interno).

Se C è più vicino a B che ad A , D è esterno dalla parte di B . Via, via, che C si avvicina a B anche D si avvicina a B fino a diventare coincidenti in B . Se " C " allontanandosi da B , va verso il punto medio di AB ; D si allontana da B , andando verso il punto improprio che raggiunge quando C è nel punto medio. Se C continua il suo avvicinamento ad A superando il punto medio, il punto D salta bruscamente dal punto ∞ dalla parte di B al punto ∞ dalla parte di A e comincia ad avvicinarsi ad A . (Noi sappiamo che il punto ∞ dalla parte di B è lo stesso punto improprio del punto ∞ dalla parte di A .) Il moto di C ed il moto di D , hanno versi opposti.

La costruzione grafica è banale, preso un punto qualsiasi

fuori della retta (ABC) ed assunto come vertice "V" comune ad A e B, si congiunge V con C. Preso su VC un secondo vertice "U" comune ad A e B, si congiunge "U" con A e B determinando i vertici P e Q. La retta $\overline{PQ}$ incontra in D la retta (ABC) .

Vi sono molte altre costruzioni del quarto armonico. Per esempio; sull'asse di A, B si scelga il centro di un cerchio passante per A e per B, siano M ed N gli estremi del diametro sull'asse, se da uno dei due estremi si traccia una corda passante per C per esempio $\overline{NS}$, unito M con S e prolungato si trova il punto D.



Si noti anche, come scambiando A con B e D con C, si ottiene lo stesso birapporto, che, trattandosi di gruppo armonico in questo caso il birapporto vale: (-1) .

Esercizio

Dati tre punti allineati: A, B, C , costruire il quarto punto D , in modo che il birapporto $(ABCD)$ abbia un assegnato valore h . $(ABCD) = h$

Sappiamo che:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \left(\frac{AC}{BC}\right)\left(\frac{BD}{AD}\right) = h$$

Ci avvaliamo del teorema:

Il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie, è un invariante proiettivo.

Cioè non cambia se ai quattro elementi se ne sostituiscono altri quattro appartenenti ad una stessa forma di prima specie ed ottenuti mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

Si chiamano forme di prima specie: Le punteggiate (cioè le rette riguardate come l'insieme dei punti di cui sono composte), il fascio di rette, (cioè l'insieme piano delle rette aventi un punto in comune), Il fascio di piani, cioè l'insieme dei piani aventi una retta (asse) in comune.

Per il nostro problema notiamo che il rapporto $AC/BC = (ABC)$ è dato, mentre noi dobbiamo trovare un punto D tale che $(ABCD) = h$.

Se noi, da un punto S proiettiamo i quattro punti A, B, C, D , su un'altra retta, (se le due coppie si considerano: AB fissa e CD mobile,) passante per B avremo quattro punti corrispondenti su questa nuova retta: A', B', C', D' (ove: $B' \equiv B$) il cui birapporto è invariante cioè: $(ABCD) = (A'B'C'D') = h$.

Non sono invece invarianti i rapporti semplici: per esempio, se sulla nuova retta facciamo il rapporto: $(A'B'C') = 1$ avremo: $\overline{B'D}/\overline{AD} = h$, cioè $\overline{B'D} = \overline{AD} \cdot h$.

Per avere $(A'B'C') = 1$, basta: $A'C'/B'C' = 1$ siccome abbiamo preso $B \equiv B'$ occorrerà che A' o C' vada all' ∞ cioè sia il punto improprio della nuova retta. Poniamo: $C' = C_\infty$, cioè la nuova retta passante per $B \equiv B'$, dovrà essere parallela al raggio proiettante: $\overline{SC}$, ed incontrerà in A' il raggio proiettante $\overline{SA}$.

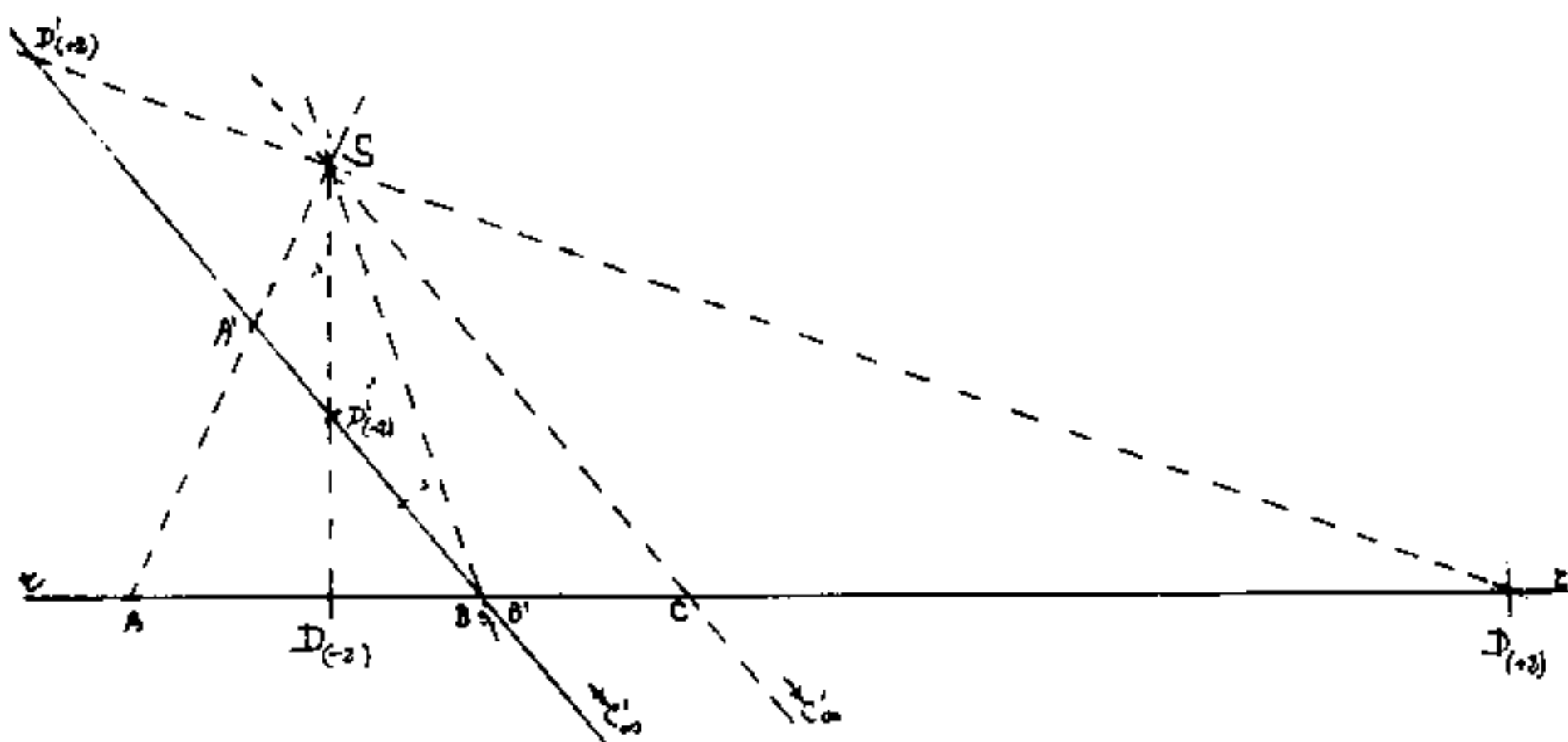
Sul segmento $\overline{A'B'}$ scegliamo un punto D' tale che $B'D' = h \overline{AD}$ avremo: $(A'B'C'D') = h$, il raggio $\overline{SD'}$ sarà il raggio proiettante $\overline{SD}$ che inizialmente abbiamo supposto di tracciare, ma non era stato possibile tracciare, essendo D e' incognita da trovare.

Non è questo, l'unico modo di risolvere il problema, può essere verificato usando altri metodi.

Noi vogliamo verificare numericamente il problema, perciò faremo un disegno in scala.

Gli elementi noti siano: $\overline{AB} = 3,2$; $\overline{AC} = 5,1$; $h = \pm 2$

Il punto S sia casuale.



Disegnati sulla retta r i tre punti noti, da un punto S (arbitrario li proiettiamo tracciando le rette $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, (raggi proiettanti). Quindi assunto $B' \equiv B$ e $C' = C$, in modo che il rapporto: $A'B'/A'C'$ sia uno, per B tracciamo la parallela ad $\overline{SC}$ passante per $B \equiv B'$ che incontrerà in A' il raggio $\overline{SA}$. Sappiamo che: $(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'}$; ma: $A'C'/B'C' = 1$ perciò: $(ABCD) = B'D'/A'D' = h$

$$\boxed{(B'D') = h(A'D')}$$

per $h = -2$, $B'D' = \frac{2}{3}A'B'$ e $D_{(-2)}$ è intermedio ad $\overline{AB'}$

per $h = +2$ basta prendere $A'D'_{(+2)} = A'B'$ e $D'_{(+2)}$ è esterno ad AB .

Con questo metodo, abbiamo ridotto il valore di un birapporto al valore del rapporto semplice dei tre punti allineati: $(B'A'D')$. (B' precede A' perché: $\frac{B'D'}{A'D'} = h$).

Se calcoliamo numericamente si ha: $\overline{AD}_{(-2)} = 1,833710627$
 $\overline{AD}_{(+2)} = 12,55384615$, che verificano la costruzione grafica.

Consideriamo ora i quattro punti fissi:
 $(ABCD) = +2$ e verifichiamo che scambiando entrambe le coppie il birapporto non cambia:

$$(ABCD) = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{5,1/1,9}{12,55/9,35} = +2$$

$$(BADC) = \frac{BD/AD}{BC/AC} = \frac{9,35/12,55}{1,9/5,1} = +2$$

$$(CDAB) = \frac{CA/DA}{CB/DB} = \frac{-5,1/-12,55}{-1,9/-9,35} = +2$$

$$(DCBA) = \frac{DB/CB}{DA/CA} = \frac{-9,35/-1,9}{-12,55/-5,1} = +2$$

Consideriamo: $(+2 = K)$ e calcoliamo i sei birapporti diversi. (in ciascuno dei quali, scambiando le due coppie di lettere, il valore non cambia, come sopra.)

$$(ABCD) = +2 = K$$

$$(ABDC) = \frac{AD/BD}{AC/BC} = \frac{12,55/9,35}{5,1/1,9} = \frac{1}{2} = \frac{1}{K}$$

$$(ACDB) = \frac{AD/CD}{AB/CB} = \frac{12,55/(12,55-5,1)}{3,2/(-1,9)} = \frac{12,55/7,45}{3,2/(-1,9)} = -1 = \left(\frac{1}{1-K} \right)$$

$$(ACBD) = \frac{AB/CB}{AD/CD} = \frac{3,2/(-1,9)}{12,55/7,45} = -1 = (1-K)$$

$$(ADCB) = \frac{AC/DC}{AB/DB} = \frac{5,1/(-7,45)}{3,2/(-9,35)} = 2 = \frac{K}{K-1}$$

$$(ADBC) = \frac{AB/DB}{AC/DC} = \frac{3,2/-9,35}{5,1/-7,45} = \frac{1}{2} = \frac{K-1}{K}$$

Si noti che quando $K=2$ si hanno tre coppie di valori: K ; $\frac{1}{K}$; $(1-K)$.

Proiettività fra le forme di prima specie

Nomenclatura e fondamenti della geometria proiettiva

Sono elementi primari e fondamentali della geometria proiettiva: i punti, le rette, i piani, (propri od impropri.)

Dagli elementi fondamentali discendono le figure dette forme fondamentali

Le forme fondamentali si distinguono in tre specie diverse.

1) Forme fondamentali di prima specie

sono: a) La punteggiata e la retta che fra gli infiniti suoi punti comprende il punto improprio, se è impropria comprende un punto proprio. Essa può essere generata dalla traiettoria di un punto che si muove di moto rettilineo equiretoso, e che ritorna sul suo percorso dopo aver oltrepassato il punto proprio o il punto improprio.

Per collegare la punteggiata ad una proiettività consideriamo una retta reale ed un punto fuori di essa che indicheremo con S ; per S facciamo passare una seconda retta (raggio proiettivo)

Riguardiamo la retta per S , come due semirette, cioè due raggi proiettivi, uscenti da S , di cui uno incontra la retta reale in un punto (proprio o improprio) mentre l'altro in un punto (improprio).

Se i due raggi uscenti da S (di verso opposto, e quindi allineati) ruotano nel piano definito da S e dalla retta reale, mentre uno di essi incontra tutti i punti della retta reale (punteggiata) compreso il suo punto improprio, l'altro raggio (opposto), associerà la sua direzione ad un punto improprio, fino a coincidere, nel punto improprio della retta reale, con la direzione opposta dell'altro raggio; se la rotazione continua per lo stesso verso, i due raggi si scambiano fra loro e sarà il secondo a segnare la punteggiata mentre il primo associerà la sua direzione ad un punto improprio. Ma la retta reale ed i raggi ruotanti intorno ad S sono complanari e la retta reale ha un solo punto improprio, coincidente con la sua direzione, ogni altro punto reale della punteggiata è associato ad una direzione complanare con un centro proiettivo, S . (Data l'importanza del concetto: "Direzione", ciò è notevole).

Altre forme di prima specie sono:

- b) Il fascio di rette (complanari)
 - c) Il fascio di piani (aventi un asse comune)
-

2) Forme fondamentali di seconda specie

- a) Piano punteggiato
- b) Piano rigato (luogo del fascio di rette con punto proprio o improprio)
- c) La stella di rette
- d) La stella di piani

Considerando la stella di rette come raggi proiettanti uscenti da S , che per un verso, incontrino il piano punteggiato e per il verso opposto associno una direzione, potremmo ripetere quanto già detto per le forme di prima specie, completando l'insieme delle direzioni.

3) Forme fondamentali di terza specie

- a) Lo spazio punteggiato
 - b) Lo spazio di piani.
-

Data una figura appartenente ad una forma di prima o seconda specie, si ha una proiettività (o trasformazione proiettiva) quando si operi un numero finito di proiezioni e sezioni (omografie o collineazioni per le forme di prima specie, reci proci o correlazioni per le forme di seconda specie). Hanno carattere proiettivo quelle proprietà che sono invarianti.

Le proprietà grafiche hanno carattere proiettivo. inversamente ogni proprietà proiettiva può essere espressa in forma grafica.

In geometria proiettiva vale il principio di dualità di Staudt.

Alcuni autori per simboleggiare una relazione di proiettività fra due forme u e u' scrivono

$$u \bar{\wedge} u'$$

Se di punti: $(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} (A', B', C', \dots)$

Noi non riteniamo pratico il simbolo $\bar{\wedge}$ perché già usato con $\vec{v} \wedge \vec{u}$ che si legge: "v" vettore "u" e rappresenta il prodotto vettoriale di $\vec{v}$ in $\vec{u}$. La sopra: neatura al simbolo di prodotto vettoriale, può avere altri significati che esulano dalla proiettività.

Una ed una sola proiettività è determinata da due terne di elementi corrispondenti arbitrari di prima specie

L'origine della geometria proiettiva è da ricercarsi nella "prospettiva", e sono ancora i maestri toscani: "Pier della Francesca, Filippo Brunelleschi, Leonardo da Vinci, i fondatori di questa disciplina. Nel 1636, G Desargues, ne pubblicò i metodi, seguito da Pascal (1640) e G Monge (1746-1818) dette il nome alle proiezioni ortogonali. J.V. Poncelet, nel suo: "Traité des propriétés projective des figures" - Paris 1822. - getta le fondamenta della geometria moderna. La sua opera è continuata da Möbius, da J. Steiner, da M Chasles, da K.G.Ch.v Staudt.

La prospettività è un caso particolare della proiettività; due forme di prima specie dello stesso nome si dicono prospettive quando per passare da un elemento al suo corrispondente occorrono due operazioni di proiezione e di sezione.

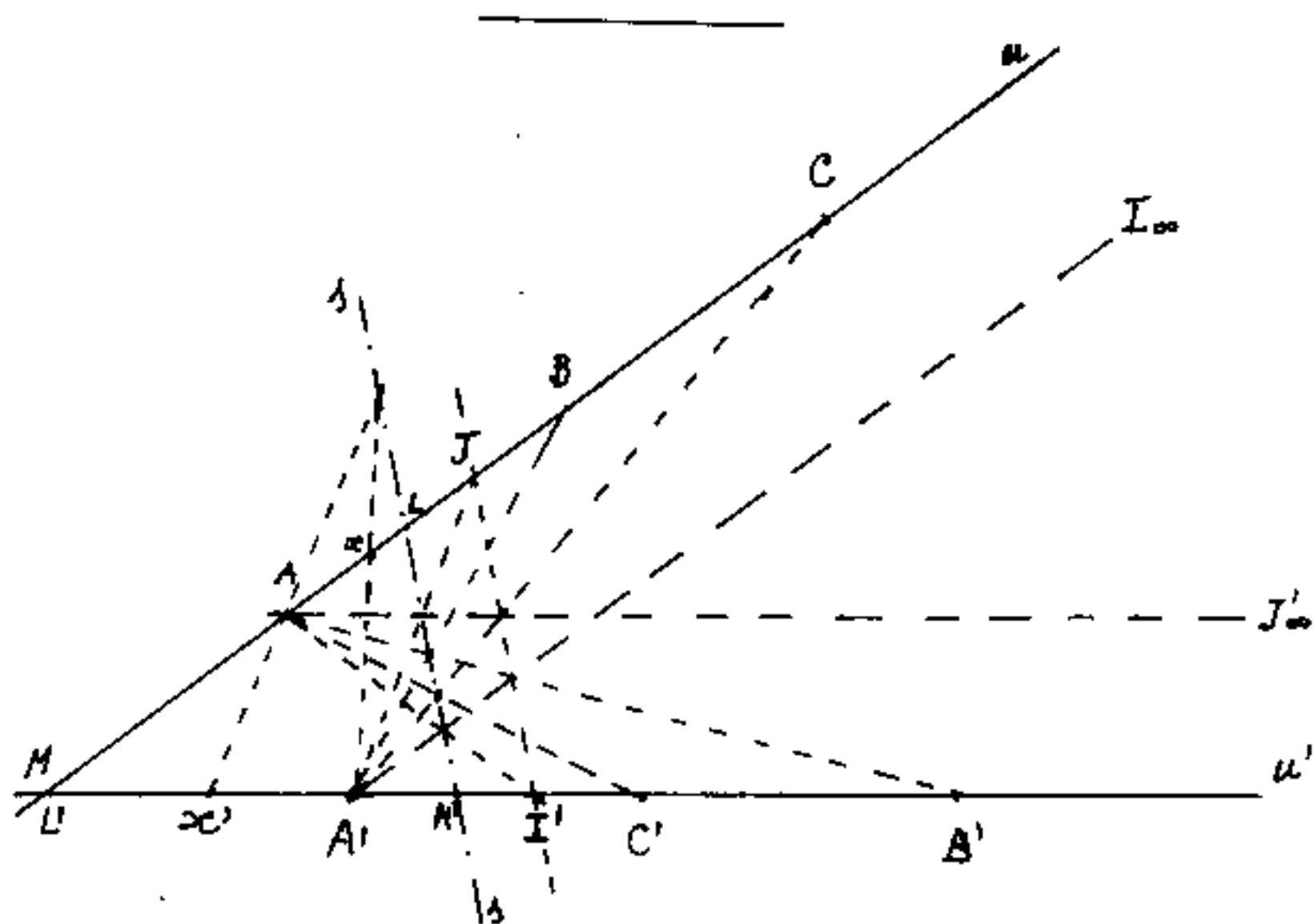
Se due punteggiate complanari sono prospettive, le rette che uniscono i punti corrispondenti passano tutte per uno stesso punto detto Centro di prospettiva.

Se due fasci complanari di rette (raggi) sono proiettivi, i raggi corrispondenti si incontrano su una retta detta asse di prospettiva.

Diconsi punti limite di due punteggiate proiettive i punti propri che hanno per corrispondenti gli impropri.

ESERCIZI

Date due punteggiate distinte u ed u' costruire la proiettività determinata dalla corrispondenza dei punti A, B, C , di " u " con A', B', C' , di " u' ". Determinare i punti limite.



Assunti A ed A' come centri di proiezione (s e s') da A si proiettano B e C , da A' si proiettano B' e C' il punto comune ai raggi AB' ed $A'B$, ed il punto comune ai raggi AC' e $A'C$, determinano l'asse " s " detto asse di collineazione

Se da A si traccia una parallela ad u' il punto sull'asse di collineazione unito con A' determina su " u " il punto limite J analogamente da A' la parallela ad " u " determina il punto limite I' su u' .

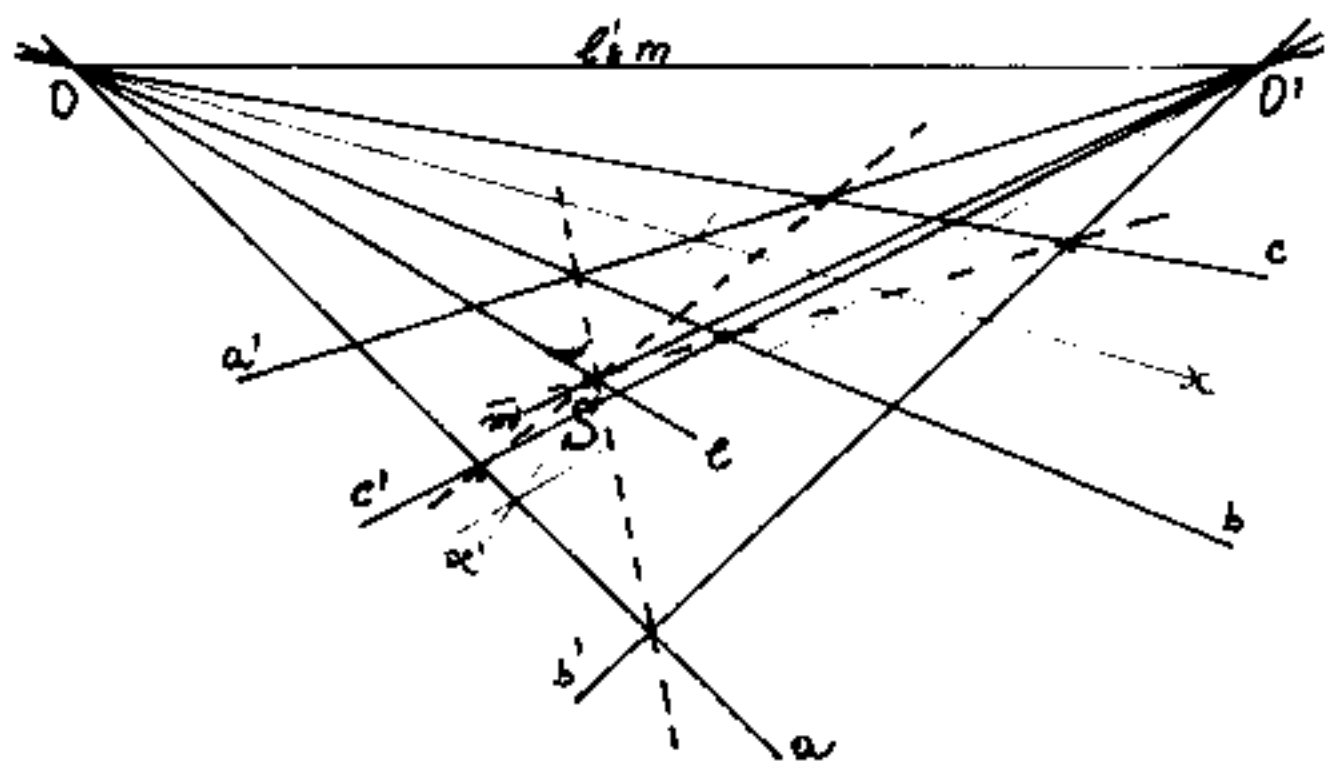
come si vede, una volta noto l'asse di collineazione s , e preso un punto x arbitrario, si può ricavare il corrispondente x' e viceversa.

I punti M ed L' , che si sovrappongono nel punto comune alla u ed u' , trovano i corrispondenti M' ed L sull'asse s .

Si noti che la retta JI' è parallela alla s .
Si noti che s è invariante se come centri di proiezione si prende C e C' , oppure B e B' .

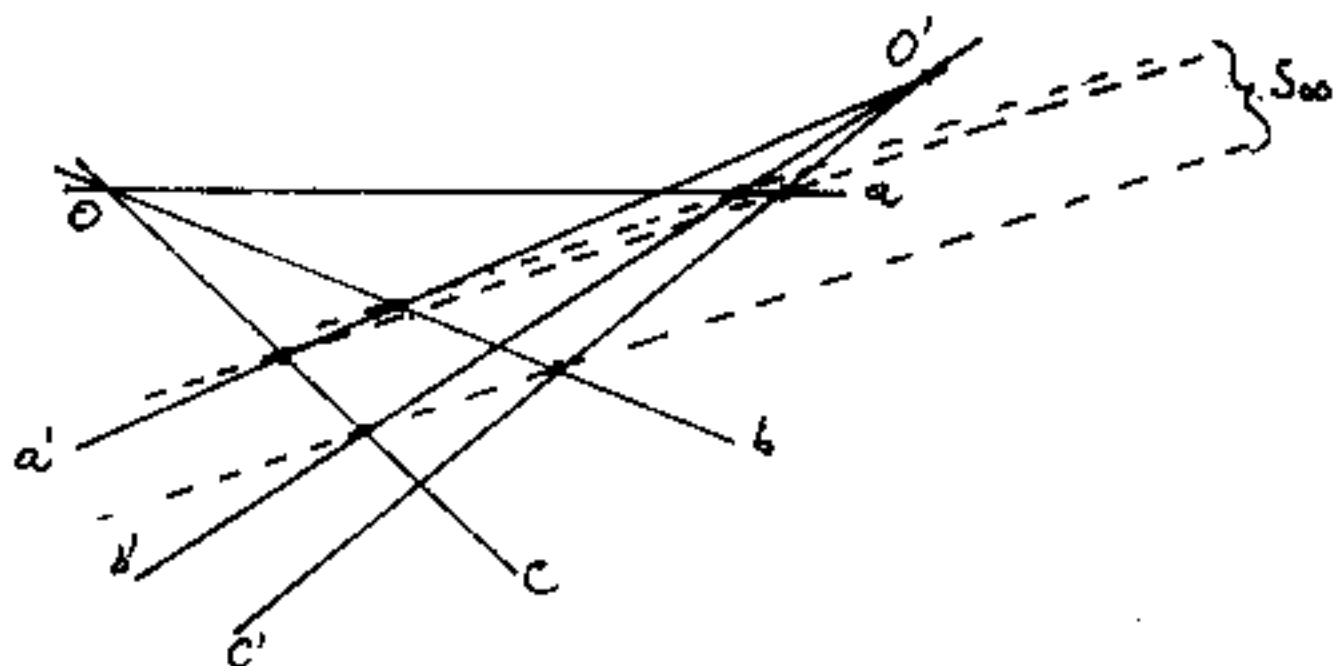
Consideriamo due fasci di raggi uscenti da O e da O' e siano noti tre raggi corrispondenti: a, a' ; b, b' ; c, c' ; determinare la proiettività.

È l'analogo della precedente costruzione: unendo i punti comuni ad ab' ed $a'b$; ac' ed $a'c$; bc' ed $b'c$; si trova il centro



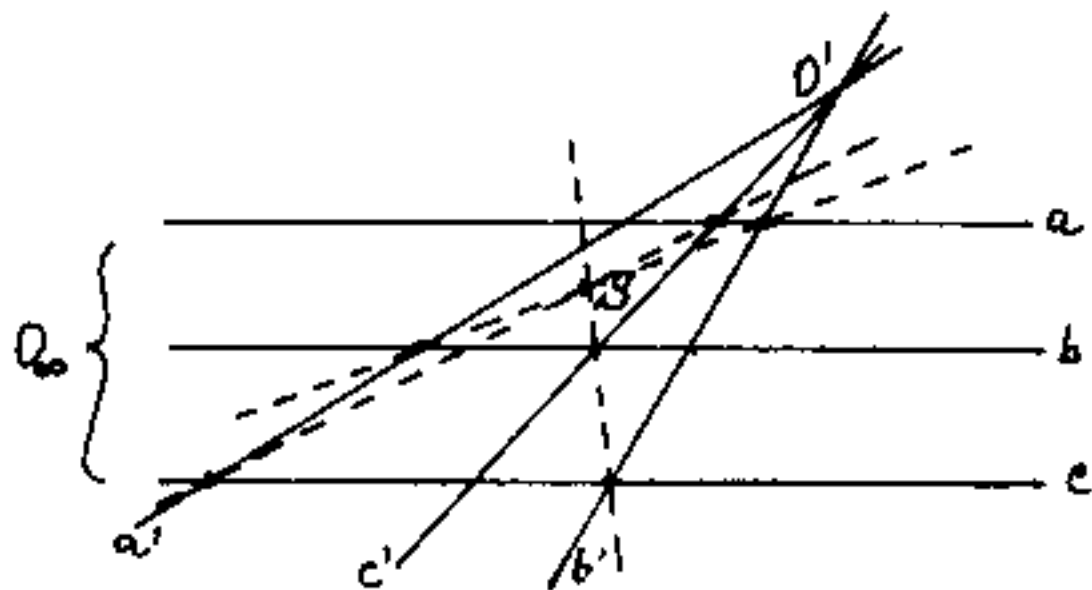
S della proiettività, o centro di collineazione. (l ed m' hanno i corrispondenti sovrapposti nell'unico raggio $OO' = l' \equiv m$)

Costruire una proiettività che abbia il centro S_∞ all'infinito. Sono dati $O, O', aa'; b; cc'$; basta tro-



varre il raggio b' . A tal fine i raggi a e c' ed i raggi a' e c determinano due punti che danno la direzione di S_∞ dal punto comune a b'' e c'' si traccia la parallela verso S_∞ che su c'' determina il punto per cui passo $b'c$, avremmo potuto fare la costruzione con b e a' , verifichiamo il parallelismo verso S_∞ .

Se il centro Q_∞ è all'infinito ed O' è in campo finito, costruire la proiettività.



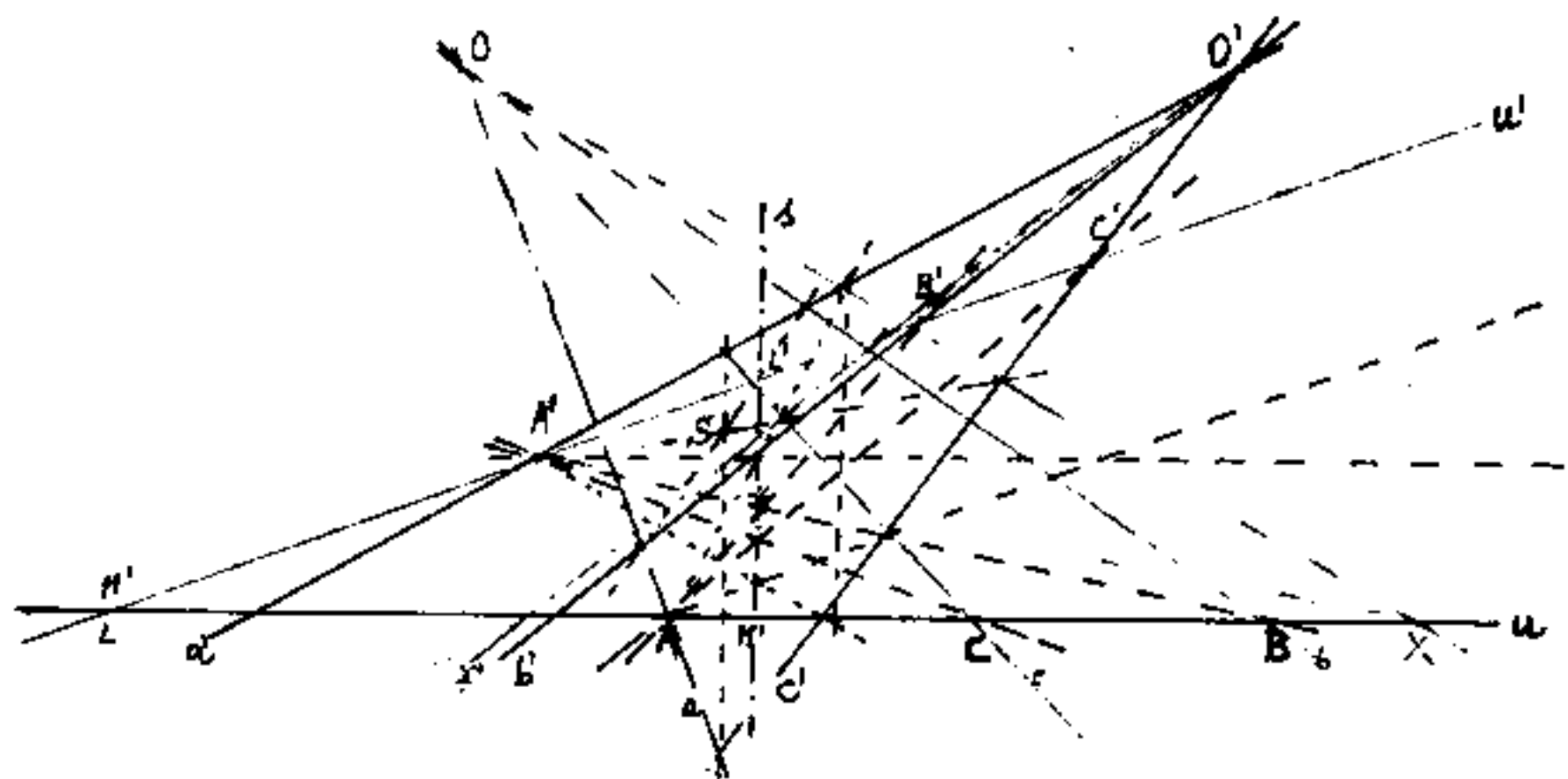
La costruzione è analoga alle precedenti e non richiede ulteriori chiarimenti.

Ancora la stessa costruzione se O_m ed O'_m sono all'in-



finito. Le rette "l" ed m' sono dette rette limite in quanto corrispondenti alle rette improprie: l_∞ , ed m_∞ .

Data la punteggiata "u" ed il fascio comp_lanare O' trovare la proiettività



Si traccia una retta u' arbitraria che determinerà sul fascio i punti A', B', C' , perciò essendo noti A, B, C , della punteggiata, la costruzione è riconducibile al primo esercizio. Oppure si sceglie un punto O arbitrario da

cui si proiettano i punti A, B, C , costruendo così il fascio: a, b, c , che col fascio per $O': a', b', c'$, determinano il centro di collineazione S .

È importante verificare che preso un punto arbitrario X sulla punteggiata ad esso corrisponde il raggio x' da O' , e viceversa, e che sono invarianti, qualunque sia la retta arbitraria u' oppure qualunque sia il centro arbitrario O . Si può verificare anche che dato X per trovare x' o viceversa, sia che ci si avvalga dell'asse di collineazione " s ", sia che ci si avvalga del centro di collineazione " S ", il risultato non cambia.

I Punti impropri

La geometria proiettiva estende lo spazio ai cosiddetti "punti impropri"; abbiamo già associato il concetto "direzionale" ai punti impropri; ma riteniamo che l'argomento meriti qualche osservazione in più. Dalla definizione eleatica del punto: "Ciò che non ha parti", alla accettazione della: "non esistenza materiale" dei punti in campo finito, si suppone che, anche per lo spazio cosiddetto reale o proprio, per il punto, possano esservi proprietà nuove tutte da scoprire.

Il punto proprio si affaccia a tutte le direzioni possibili; inversamente, i punti propri, possono considerarsi le "intersezioni" di tutte le possibili "direzioni" costituite dai fasci di rette parallele, o meglio dai punti impropri che le rappresentano.

Il punto proprio, come centro di proiezione, può essere riguardato sia come "sorgente irradiante", sia come "fuoco delle irradiazioni".

In genere, degli infiniti raggi che hanno un punto comune, se ne "caratterizza" solo una parte; per es.: La "punteggiata" caratterizza due raggi opposti, comuni a tutti i punti che la costituiscono. (Spazio monodimensionale). Il "piano punteggiato" caratterizza l'insieme dei raggi opposti complanari, comuni a tutte le punteggiate complanari. (Spazio bidimensionale).

Lo spazio geometrico punteggiato caratterizza l'insieme dei raggi comuni a tutte le punteggiate possibili, cioè l'insieme dei "fasci direzionali" determinati dai punti impropri. (Spazio tridimensionale)

Se alle tre dimensioni geometriche aggiungiamo "un succedersi" cioè un tempo, con ciò abbiamo: Lo spazio cinematico punteggiato che, istante per istante, è lo spazio geometrico, ma caratterizza un fluire

che, nel tempo, equivale ad un prima ed un dopo l'istante, ma graficamente, "il fluire" è un punto dopo l'altro, e ciò implica "un verso". Questo fluire su un grafico, noi lo facciamo leggendo una lettera dopo l'altra, poi l'esperienza ci permetterà di leggere una intera parola dopo l'altra. Notare come, nel leggere, parole nuove, piuttosto lunghe, che entrano in interesse nel campo visivo, ma sono per noi inusitate, tendiamo a spezzarle in due o tre parti, anche se le pronunciamo correttamente.

La punteggiata nasce dal moto rettilineo di un punto che ha lasciato memoria del suo cammino, cioè ad ogni punto di ogni retta si può associare un tempo con origine arbitraria e modalità di moto che, partendo dal moto uniforme a velocità costante, può diventare comunque vario; quindi il "tempo" di ciascun punto ed il suo legame direzionale coi punti adiacenti, sono sufficienti a qualificare qualunque moto. (Anche curvilineo).

Il fluire "continuo" del tempo dà il vero concetto di continuità. Come per i punti impropri che uniscono gli estremi indefiniti di una retta; così il tempo infinito del passato ed il tempo infinito del futuro si uniscono nel tempo improprio.

Mentre un punto, in campo finito, si affaccia a tutte le infinite direzioni spaziali, e scelta una di esse, si può raggiungere il punto improprio, che la definisce, sia muovendosi nel verso positivo, sia muovendosi in verso opposto (negativo); cioè se la retta per il punto P, si orienta con un verso (arbitrario), e consideriamo zero il punto P, origine di due semirette, notiamo che, per il fluire da P, le due semirette hanno segno opposto; all'estremo infinito di esse vi è lo stesso punto improprio. Quindi il salto di segno si può avere sia sullo zero (origine), sia all'infinito.

Il tempo, considerando l'istante, ha solo una direzione che si scinde in due da quell'istante, cioè il passato, ed il futuro, che si riuniscono nell'istante improprio. Però, per il tempo, il verso del fluire non è arbitrario, ma unico, e va dal passato al futuro. A ciò si abbina il concetto di sequenza, forse il più importante in analisi, connesso con l'implicazione, vista come: "con-sequenza" $\rightarrow$ "con-sequenza". Il "prima" è l'accettazione di una pre-messa; il dopo è la deduzione logica.

La premessa può essere ipotetica: "se... $\rightarrow$ allora..."

Nel linguaggio dei computer: "if.... $\rightarrow$ then"....
 Occorre distinguere quel: "se" (od "if") che può essere una constatazione di un risultato, ma può anche essere una condizione ipotetica della possibilità, o dell'impossibilità. Il Russel pose la seguente tabella: " $p \supset q$ " si legge: "se P allora q"; p e q, possono essere veri (1) o falsi (0) ed anche l'implicazione può essere vera o falsa:

antecedente	conseguente	implicazione
p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Rimandiamo al capitolo: "la logica" questo argomento e torniamo al nostro punto.

Se pensiamo ad un "taglio", in qualsiasi corpo, pensiamo ad un "piano", (privo di spessore), che ha operato il taglio. Ma il piano ha una precisa "giacitura" orientata, cioè le due facce del piano (privo di spessore) hanno "segno opposto". (+, -)

Una "punteggiata", può considerarsi una retta nella quale si sia operata una sequenza di tagli,

due tagli successivi, (affiancati) delimitano un punto, (privo anch'esso di spessore), cioè infiniti tagli ed infiniti punti formano una successione di segni alterni $+-$, priva di lunghezza. Se avesse una lunghezza potremmo rappresentarla: $-|+ \cdot -|+ \cdot -|+ \cdot -|+ \cdot -|+ \cdot -|+ \cdot -|+ \cdot -|+ \cdot -|+$
Anche i punti appaiono "polarizzati" dal $(-+)$.

Abbiamo detto che il fluire implica un tempo; il più piccolo intervallo di tempo (il differenziale dt) permette di definire il più piccolo intervallo di spazio (il differenziale ds) ove ds/dt è la velocità istantanea che caratterizza il fenomeno. (Nel ds vi sono infiniti $+-$)

Abbiamo insistito anche troppo su questi aspetti che possono portare la matematica e la geometria all'origine dell'energia $\rightarrow$ materia, ma la materia e l'energia sono "qualificate"; per la materia ciò porterà alla cristallografia, per l'energia alla ricerca di una forma energetica fuori della materia; una pre-energia, che potrebbe identificarsi in un soffio creativo.

Osservazioni sulle quadriche

L'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

può essere riguardata sotto molti aspetti. Volendo, per esempio, la rappresentazione della superficie mediante isoipse, basta considerare parametro la "Z" variabile per valori discontinui con intervallo costante; questo modo porterebbe alla espressione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2[a_{13}z + a_{14}]x + 2[a_{23}z + a_{24}]y + [a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44}] = 0$$

che rappresenta "la conica" intersezione fra la superficie ed il piano a quota Z parallelo ad xy.

Nel secondo volume abbiamo trattato i coefficienti delle equazioni delle coniche, ed abbiamo rilevato diverse particolarità, per esempio affinché una conica sia al centro devono essere nulli i coefficienti della x e della y e diverso da zero il termine noto, salvo il caso della parabola ove deve essere nullo il termine noto, uno solo dei due coefficienti, per esempio quello in y ed in tal caso sarà nullo il coeff. di x^2 , o viceversa. Nell'equazione delle quadriche, se consideriamo che l'eventuale intersezione parabolica abbia per asse il parametro scelto (z), avremo che, condizione necessaria, ma

non sufficiente è che: $[a_{13}z + a_{14}] = 0$; $[a_{23}z + a_{24}] = 0$; affinché la condizione sia sufficiente e la conica rimanga al centro indipendente da z è che siano nulli: $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$.

Poiché gli assi, per la relatività dell'osservatore, sono scambiabili, potremo assumere come parametro la x , oppure la y anziché la z .

Altra condizione è che se il coefficiente di xy è nullo, ($2a_{12} = 0$) la conica non è ad assi ruotati, ed è un coefficiente indipendente dal parametro (z).

Consideriamo ora il determinante delle coniche parametriche in z :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & [a_{13}z + a_{14}] \\ a_{12} & a_{22} & [a_{23}z + a_{24}] \\ [a_{13}z + a_{14}] & [a_{23}z + a_{24}] & [a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44}] \end{vmatrix} = \Delta_c^*$$

(si astengono le $f(z)$); sviluppando per l'ultima riga:

$$\boxed{\Delta_c^* = a_{31}^* A_{31}^* - a_{32}^* A_{32}^* + a_{33}^* A_{33}^*} \quad \text{ove:}$$

$$a_{31}^* = [a_{13}z + a_{14}]; \quad a_{32}^* = [a_{23}z + a_{24}]; \quad a_{33}^* = [a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44}]$$

$$A_{31}^* = \begin{vmatrix} a_{12} & [a_{13}z + a_{14}] \\ a_{22} & [a_{23}z + a_{24}] \end{vmatrix}; \quad A_{32}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & [a_{13}z + a_{14}] \\ a_{12} & [a_{23}z + a_{24}] \end{vmatrix}; \quad A_{33}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Si noti che A_{33} è indipendente da z ed è identico formalmente a quello trovato per le coniche, ove A_{33} decideva se la conica era un'ellisse, una parabola, od un'iperbole a seconda che $A_{33} \gtrless 0$.

Sulla base di questi determinanti consideriamo le quadriche già studiate:

1) Sfera al centro: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 ; a_{12} = 0 ; a_{13} = 0 ; a_{23} = 0 ; a_{14} = 0 ; a_{24} = 0 ; a_{34} = 0 ;$$

$$a_{44} = -R^2 ; a_{31}^* = 0 ; a_{32}^* = 0 ; a_{33}^* = [z^2 + R^2]$$

$$A_{31} = 0 ; A_{32} = 0 ; A_{33} = 1 > 0 = \text{ellisse}$$

$$A_{33} \cdot a_{33} = \Delta = (z^2 - R^2) ; \text{ per } z > R ; \Delta > 0 \text{ (ellisse immaginario)}$$

2) Sfera con centro in $C = (x_c, y_c, z_c)$

$$x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 + z^2 - 2z_c z - R^2) = 0$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \text{ (se } K \text{ si divide l'eq. per } K)$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 ; a_{14} = x_c ; a_{24} = y_c ; a_{34} = z_c ; a_{44} = -R^2$$

$$a_{31}^* = -x_c ; a_{32}^* = -y_c ; a_{33}^* = (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - 2z_c z + z^2 - R^2)$$

$$A_{31} = x_c ; A_{32} = y_c \text{ (indipendenti da } z) ; A_{33} = 1$$

$$-x_c^2 - y_c^2 + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - 2z_c z + z^2 - R^2) = \Delta = [(z - z_c)^2 - R^2]$$

$$\text{ove, per } |z - z_c| > R \text{ si ha } \Delta > 0 \text{ (ellisse immaginario)}$$

Si noti che x_c ed y_c sono indipendenti da z per

$$\text{cui scrivendo: } (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 - (z - z_c)^2 \text{ si ha la}$$

famiglia delle circonferenze che cessa quando

$$|(z - z_c)| > R ; \text{ ed il cerchio massimo si ha per } z = z_c.$$

Quindi sul piano xy vediamo proiettate una

serie di circonferenze concentriche, una

per ogni valore di z nei limiti del campo reale.

Poiché sezionando un cilindro od un cono, (qualunque sia la loro sezione retta) con piani paralleli, otteniamo sempre la stessa curva di intersezione ad assi solo traslati; se i piani sono di giacitura "z", (cioè paralleli al piano xy), la z potrà figurare solo nei coefficienti che indicano traslazione di assi se trattasi di un cilindro; figurerà anche nei parametri della conica $f(x,y)=0$ se trattasi di un cono, non influenzerà la natura della conica cioè il minore $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ sarà indipendente da z. Se i piani di sezione sono paralleli all'asse del cilindro la sezione reale di due rette, (al limite sovrapposte) ha un campo limitato oltre il quale si hanno curve immaginarie. Nel cono invece il piano che ne seziona il vertice può avere inclinazione tale da sezionare il solo vertice, oppure due generatrici del cono.

Questa osservazione ci consente di esprimersi per identificare i coni ed i cilindri, per es.

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 676 = 0$$

può essere scritta:

$$160x^2 + 153y^2 - 2(12)xy - 2(36z)x - 2(48z)y - 676 = 0$$

questa conica parametrica in z è un'ellisse perché

$$A_{33}^* = \begin{vmatrix} 160 & -12 \\ -12 & 153 \end{vmatrix} = 24336 > 0 \quad \text{è ruotato perché } a_{12} \neq 0$$

ma, a_{12} è indipendente da z per cui la ruotazione

$$\text{rimane la stessa: } \varphi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right).$$

La z influenza solo i coefficienti $2a_{13}^*$, $2a_{23}^*$, cioè la traslazione degli assi, per $z=0$ si ha un'ellisse al centro, ad assi ruotati, la cui equazione è del tipo:

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)x^2 + (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)y^2 + (b^2 - a^2) \sin(2\varphi)xy = a^2 b^2$$

Dal II Vol. abbiamo:

$$(a_{11} + a_{22}) = K(a^2 + b^2) = 160 + 153 = 313$$

$$(a_{11} - a_{22}) = K(-a^2 + b^2) \cos 2\alpha = 7$$

$$K(-a^2 + b^2) = -\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} = -\sqrt{49 + 576} = -25$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{-2a_{33}^*}{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}} = \frac{1352}{313 \pm 25} = \sqrt[4]{\frac{676}{144}}$$

$b = 2$; $a = \frac{13}{6}$; assi principali dell'ellisse indipendenti da z .

Sappiamo che le coordinate del centro dell'ellisse sono:

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} \quad ; \quad y_c = \frac{-A_{32}}{A_{33}}$$

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{(-12)(-48z) - (-36z)153}{24336} = \frac{(6084)z}{24336} = \frac{z}{4}$$

$$\frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{(-12)(-36z) - (-48z)160}{24336} = \frac{(8112)z}{24336} = \frac{z}{3}$$

$$x_c = \frac{z}{4}; \quad y_c = \frac{z}{3}$$

per $z = 12$, $x_c = 3$; $y_c = 4$; $\sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 5$; $\rho = 13$
 $\cos \alpha = \frac{3}{13}$; $\cos \beta = \frac{4}{13}$; $\cos \gamma = \frac{12}{13}$ saranno i
 coseni direttori della retta passante per $C = f(z)$
 e poichè, al variare di z , restano invariati gli
 assi dell'ellisse e l'angolo di rotazione con
 gli assi cartesiani, ciò vuol dire che il solido
 è un cilindro che interseca il piano xy secondo
 un'ellisse di assi: $a = 2 + \frac{1}{6}$; $b = 2$, ruotati di $\varphi = 53^\circ 07' 48''$
 ed avente l'asse passante per il centro assi:

$$\frac{x}{3/13} = \frac{y}{4/13} = \frac{z}{12/13} \quad \text{cioè: } \boxed{\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}}$$

Poichè la proiezione dell'asse del cilindro giace sul
 diametro $a = 2 + \frac{1}{6}$ dell'ellisse, cioè $\arctg \frac{4}{3} = 53^\circ 07' 48'' =$
 $(\frac{1}{3} \arctg(-\frac{24}{7}) + 90)$; e poichè: $\cos \gamma = \frac{12}{13}$ avremo per la sezione
 retta: $b_1 = b = 2$; $a_1 = a \frac{12}{13} = (2 + \frac{1}{6}) \frac{12}{13} = 2 = b$; cioè la sezione
 retta del cilindro è un cerchio di raggio $r = 2$.

3) Cono generico

L'equazione:

$$(0,44)x^2 + (0,31)y^2 - 2(0,42)xy + 2(1,521895 - (0,232379)z)x + 2(1,37554411 - (0,271108834)z)y + [0,65z^2 - 2(1,468427661)z - 2,72572336] = 0$$

scritta nella forma di una conica parametrica in z ,

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0,44 & -0,42 \\ -0,42 & 0,31 \end{vmatrix} = +0,1364 - 0,1764 = -0,04 < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{caso} \\ \text{iperbolico} \end{array} \right)$$

$a_{12} \neq 0$; ad assi ruotati (rotazione indipendente da z)

$a_{13} \neq 0$; $a_{23} \neq 0$ ad assi traslati (funzione di z)

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -0,42 & (1,521895 - (0,232379)z) \\ +0,31 & (1,37554411 - (0,271108834)z) \end{vmatrix} = -1,049516 + (0,1859052)z$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 0,44 & (1,521895 - (0,232379)z) \\ -0,42 & (1,37554411 - (0,271108834)z) \end{vmatrix} = +1,24435335 - (0,21688707)z$$

$$\begin{cases} x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = (26,23790 - 4,647580z) \\ y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}} = (31,11088338 - 5,42217668z) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equaz. centro assi} \\ \text{(lineare in } z) \end{array}$$

eliminando z e semplificando si ha:

$$\boxed{y_c = \frac{7}{6}x_c + \frac{1}{2}}$$

equaz. del piano che contiene
la retta luogo dei punti c

$$\boxed{6y_c = 7x_c + 3}$$

Il determinante:

$$\Delta = a_{31} A_{31} - a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = 0$$

calcolato in funzione di Z ci darà i valori di Z per i quali la conica è degenera, che, nel caso iperbolico degenera in due rette reali e distinte.

$$a_{31} A_{31} = (1,521895 - 0,232379 Z)(-1,0495160 + 0,1859032 Z)$$

$$-a_{32} A_{32} = (1,37554471 - 0,271108834 Z)(-1,244435335 + 0,21688707 Z)$$

$$a_{33} A_{33} = (-2,72572336 - 2,936855322 Z + 0,65 Z^2)(-0,04)$$

$$a_{31} A_{31} = -0,0432 Z^2 + 0,526810630 Z - 1,597253157$$

$$-a_{32} A_{32} = -0,0588 Z^2 + 0,635715158 Z - 1,711775776$$

$$a_{33} A_{33} = -0,026 Z^2 + 0,117474212 Z + 0,109028938$$

$$\Delta = -0,128 Z^2 + 1,28 Z - 3,2$$

$$\Delta = 0 = Z^2 - 2(5)Z + 25 = 0$$

$$\text{da cui } \boxed{Z = 5}$$

$$\text{per } Z = 5 \quad ; \quad x_c = 3 \quad ; \quad y_c = 4$$

Quindi la nostra quadrica è un cono col vertice $V \equiv (3, 4, 5)$

Per $z = 5$, l'equazione diventa:

$$0,44x^2 + 0,31y^2 - 2(0,42)xy + 2(0,36)x + 2(0,02)y - 1,16 = 0$$

verifichiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,44 - 0,42 + 0,36 \\ 0,42 + 0,31 + 0,02 \\ 0,36 + 0,02 - 1,16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{31} A_{31} = -0,0432 \\ -a_{32} A_{32} = -0,0032 \\ a_{33} A_{33} = +0,0464 \end{array} \right\} = \Delta = 0$$

per $x = 0$ si ha, (con $z = 5$):

$$0,31y^2 + 2(0,02)y - 1,16 = 0 \quad \begin{cases} y_1 = 1,87 \\ y_2 = -2,00 \end{cases}$$

tralasciamo i passaggi:

$$\text{per } x = 0 \text{ e } z = 0 \text{ si ha: } \begin{cases} y_1 = 0,8995901 \\ y_2 = -9,774069 \end{cases}$$

Abbiamo 4 punti di un'ellisse, su due corde parallele, perciò l'unione dei punti medi delle corde è sul diametro coniugato col diametro ad esse parallelo, e parallelo al piano xy . Il punto comune a due diametri coniugati è il centro dell'ellisse; Per avere le coordinate di tale punto occorrono gli estremi del diametro. Cerchiamo le condizioni limite sull'ellisse in z per $x = 0$. L'equazione diventa:

$$0,31y^2 + 2(1,375544171 - 0,271108834z)y + [0,65z^2 - 2,936855322z - 2,72572936] = 0$$

che possiamo scrivere:

$$y^2 + 2(4,437239261 - 0,874544626z)y + [1,096774191z^2 - 2(4,736863423)z - 8,792656] = 0$$

Affinché si arrivi al limite, in y dobbiamo avere un'unica radice (doppia), funzione di z ; cioè deve essere nullo il discriminante dell'equazione:

$$\left(4,437239261 - 0,874544626z\right)^2 - \left[2,096774194z^2 - 2(4,736863423)z - 8,72656\right] = 0$$

si ha:

$$-1,331945891 z^2 + 2(0,856299674)z + 28,48174826 = 0$$

ed anche:

$$z^2 - 2(0,642893738)z - 21,38356254 = 0$$

$$z = +0,642893738 \pm \sqrt{0,413312359 + 21,38356254} =$$

$$z = 0,642893738 \pm 4,668712339 = z = \begin{cases} 5,311606077 \\ -4,025818601 \end{cases}$$

quindi:

$$y = (-4,437239261 + 0,874544626z) \pm 0 \quad (\text{radici doppie})$$

$$\text{per } z = \begin{cases} 5,311606077 \rightarrow y = +0,207997289 ; & x=0 \\ -4,025818601 \rightarrow y = -7,957997284 ; & x=0 \end{cases}$$

Quindi il centro dell'ellisse su xz è dato da

$$C \equiv (x_c=0; y_c=3,875; z_c=0,642893738)$$

$$\text{La distanza: } \overline{CV} = \sqrt{(x_v - x_c)^2 + (y_v - y_c)^2 + (z_v - z_c)^2}$$

$$\overline{CV} = \sqrt{(3-0)^2 + (4+3,875)^2 + (5-0,642893738)^2} = \sqrt{90}$$

$$\overline{CV} = 9,486832979$$

La classifica delle quadriche

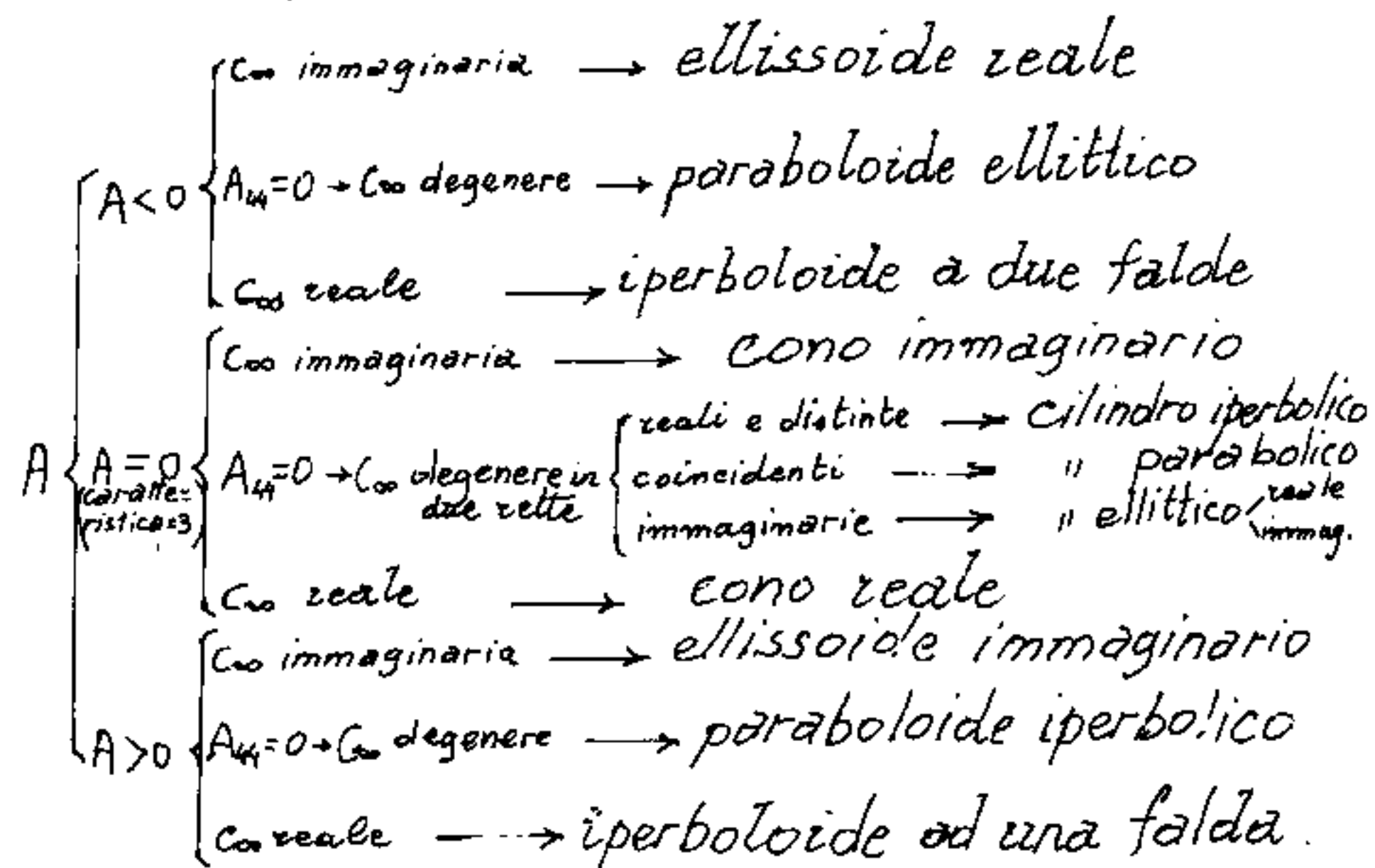
L'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44} = 0$$

polinomio completo di secondo grado nelle variabili x, y, z è l'equazione generale delle quadriche; dai coefficienti, ponendo $a_{ij} = a_{ji}$ è possibile costruire il determinante A delle quadriche:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A$$

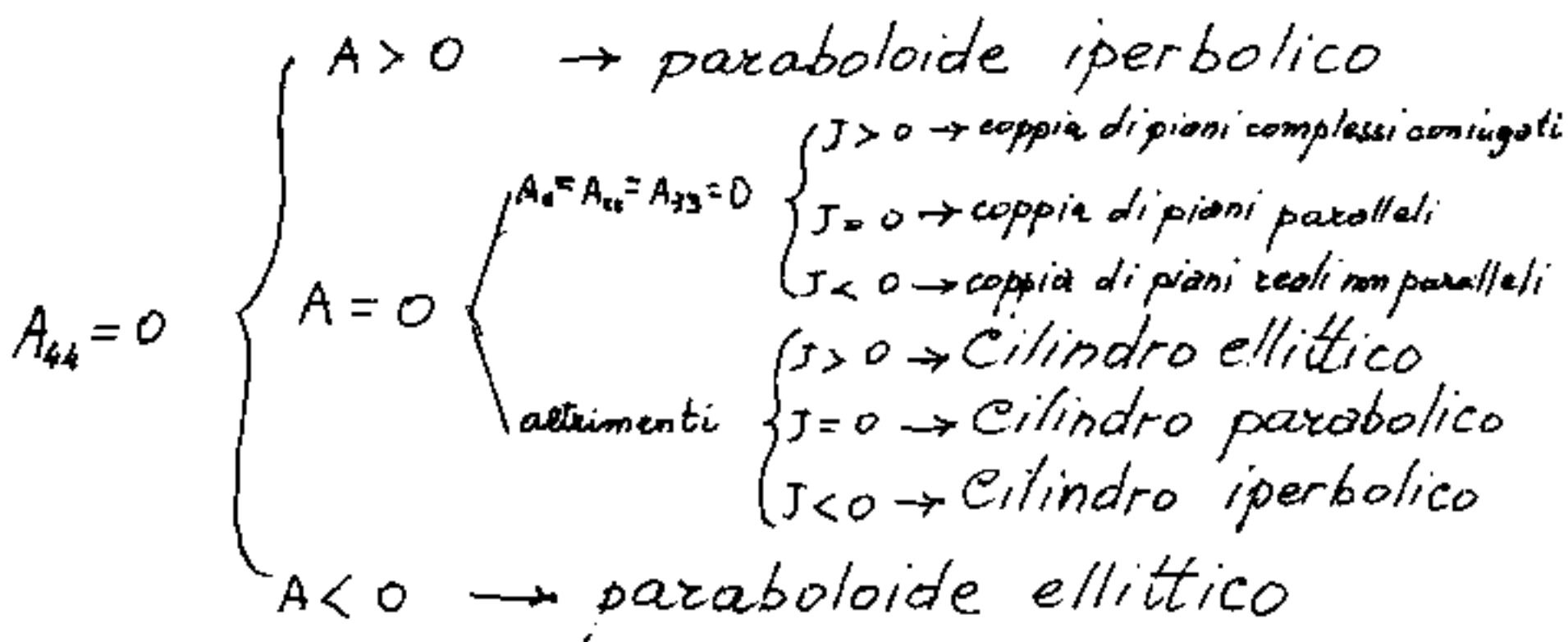
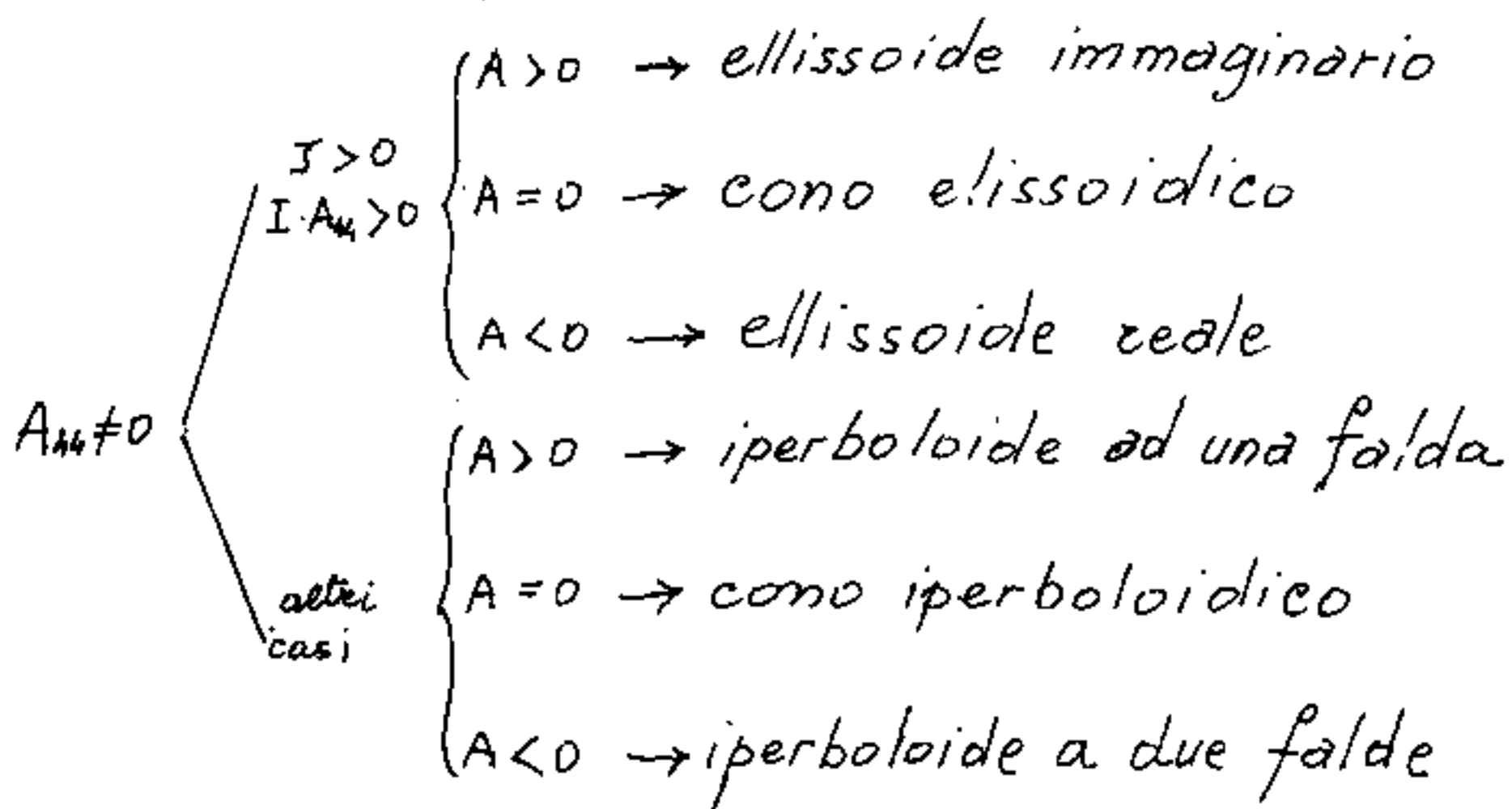
Il complemento algebrico dell'elemento a_{44} è il minore A_{44} discriminante delle coniche C_{∞} .



La classifica delle quadriche può anche schematizzarsi come segue.

Detta:
$$\boxed{I = a_{11} + a_{22} + a_{33}}$$

"
$$\boxed{J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{31} & a_{11} \end{vmatrix}}$$



L'equazione, in coordinate omogenee, di una quadrica: $f(x, y, z, t)$ si scrive:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0$$

Il determinante A della quadrica è detto: "discriminante" della quadrica. Se $A = 0$ la quadrica è degenera. La caratteristica " τ " di $A = 0$, distingue tre casi:

- 1) $\tau = 3 \rightarrow$ coni o cilindri
- 2) $\tau = 2 \rightarrow$ coppia di piani distinti (reali o no)
- 3) $\tau = 1 \rightarrow$ coppia di piani (doppi) (lo stesso piano doppio)

Una retta può essere secante, tangente, esterna, o può appartenere alla quadrica.

Se la retta è secante i punti comuni con la quadrica sono due punti reali.

Una quadrica si dice rigata se contiene infinite rette. Sono così rigati gli iperboloidei ad una falda; non sono rigati gli iperboloidei a due falde.

Se due punti P e P' , separano armonicamente, i punti di intersezione di una quadrica con una retta, i punti P e P' si dicono coniugati rispetto alla quadrica. Dicesi piano polare il luogo dei punti coniugati di un punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0, t_0)$.

Tutti i punti appartenenti ad una quadrica sono dello stesso tipo. Essi si distinguono in:

Punto iperbolico, punto parabolico, punto ellittico.

A seconda che le due rette comuni alla quadrica ed al piano tangente in quel punto sono:

reali e distinte, coincidenti, immaginarie coniugate.

Le quadriche a punti parabolici sono solo coni o cilindri ($A=0$).

Le quadriche a punti iperbolici sono gli iperboloidi ad una falda ed i paraboloidi iperbolici ($A>0$)

Le quadriche a punti ellittici sono ellissoidi, iperboloidi a due falde, e paraboloidi ellittici ($A<0$)

La conica C_∞ è da considerarsi l'intersezione del piano improprio ($t=0$) con la quadrica.

Cioè C_∞ è data dalle equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

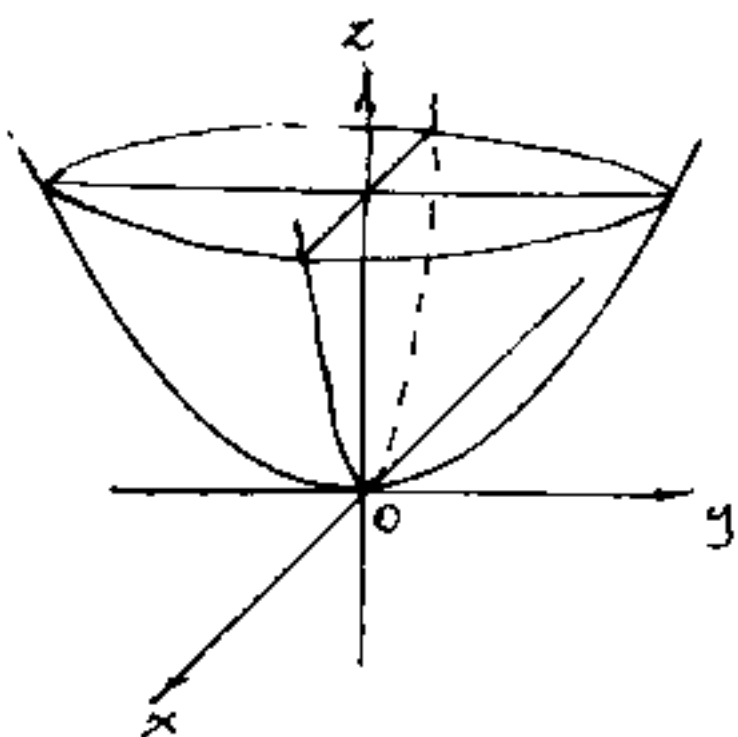
(vedi equazione in coordinate omogenee).

Sviluppiamo ora le equazioni del paraboloide ellittico, e del paraboloide iperbolico, ed aggiungiamo l'equazione del toro (che non è una quadrica, pur essendo una superficie di rotazione.)

Paraboloido ellittico

Se consideriamo un'ellisse di semiassi a, b , che mantenendo costante il rapporto: a^2/b^2 , variano con z in modo parabolico: $za^2 = p$; $zb^2 = q$ avremo l'equazione del paraboloido ellittico:

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}$$



se poniamo $z=0$ si ha:

$$qx^2 = py^2$$

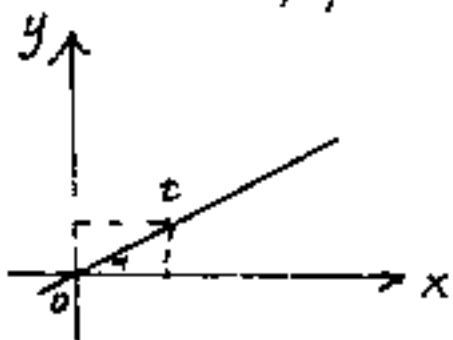
cioè: $\pm y = \pm \sqrt{\frac{q}{p}} x$ coppia di rette

Per $x=0$: $z = \frac{y^2}{2q}$ ove q è

la doppia distanza focale della parabola; (analogo per $y=0$)

Se consideriamo un piano qualsiasi passante per z per es. $y = mx$; $y^2 = m^2 x^2$; sostituendo si ha:

$z = \left(\frac{q + pm^2}{2pq} \right) x^2$ che è ancora una parabola.



Se indichiamo con t la distanza da 0 misurata lungo la retta ove $m = \tan \alpha$

avremo $x^2 = t^2 \cos^2 \alpha$; $y^2 = t^2 \sin^2 \alpha$; e sostituendo:

do: $\left(\frac{\sin^2 \alpha}{p} + \frac{\cos^2 \alpha}{q} \right) t^2 = 2z$. ove: $\frac{pq}{q \sin^2 \alpha + p \cos^2 \alpha}$ è la doppia distanza focale della parabola sul piano: $y = mx$.

L'equazione può scriversi:

$$\boxed{qx^2 + py^2 - 2pqz = 0}$$

si nota che:

$a_{11} = q$; $a_{22} = p$; $2a_{34} = -2pq$; tutti gli altri coefficienti sono nulli. Avremo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix} \quad A = -a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34}^2 = -a_{34} A_{34} \quad ; \quad A_{44} = 0$$

$$A < 0 ; A_{44} = 0$$

Paraboloido ellittico ad assi traslati

$$q(x-x_c)^2 + p(y-y_c)^2 + -2pq(z-z_c) = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} q & 0 & 0 & -2pq \\ 0 & p & 0 & -2pq \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2pq & -2pq & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \\ xz \\ yz \\ xy \end{matrix} + \begin{matrix} -2q(x_c) \\ -2p(y_c) \\ -2pq \\ q(x_c^2 + p(y_c^2) + 2pqz_c) \end{matrix} = 0}$$

Notiamo che la parabola ($y = mx^2$) ha una sola variabile al quadrato, quindi l'asse della parabola sarà nel verso della variabile che manca al quadrato. (Nella formula di cui sopra: $a_{33} = 0$, perciò l'asse è secondo z) sono pure nulli i coefficienti: $2a_{12} = 2a_{13} = 2a_{23} = 0$, perciò non si hanno inclinazioni.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad A = -a_{11} a_{22} a_{34}^2 = -a_{34} A_{34} \quad ; \quad A_{44} = 0$$

$$K = \frac{-a_{11} a_{22}}{a_{34}} ;$$

per cui:

$$x_c = \frac{a_{14}}{qK}$$

$$x_c = \frac{a_{14}}{a_{11}}$$

$$y_c = \frac{a_{24}}{a_{22}}$$

Se $p=q$, si ha il paraboloido circolare solido di rotazione generato da una parabola che ruota intorno al proprio asse.

Paraboloido ellittico con assi dell'ellisse ruotati rispetto agli assi cartesiani.

L'equazione dell'ellisse al centro con assi ruotati $\tilde{x}$ (vedi II vol) $\left(\frac{\sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin(2\alpha)xy = 1$,
che può scriversi:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \left[\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right)\sin(2\alpha)\right]xy = 1$$

Perciò l'equazione del paraboloido ellittico avente per asse l'asse z sarà:

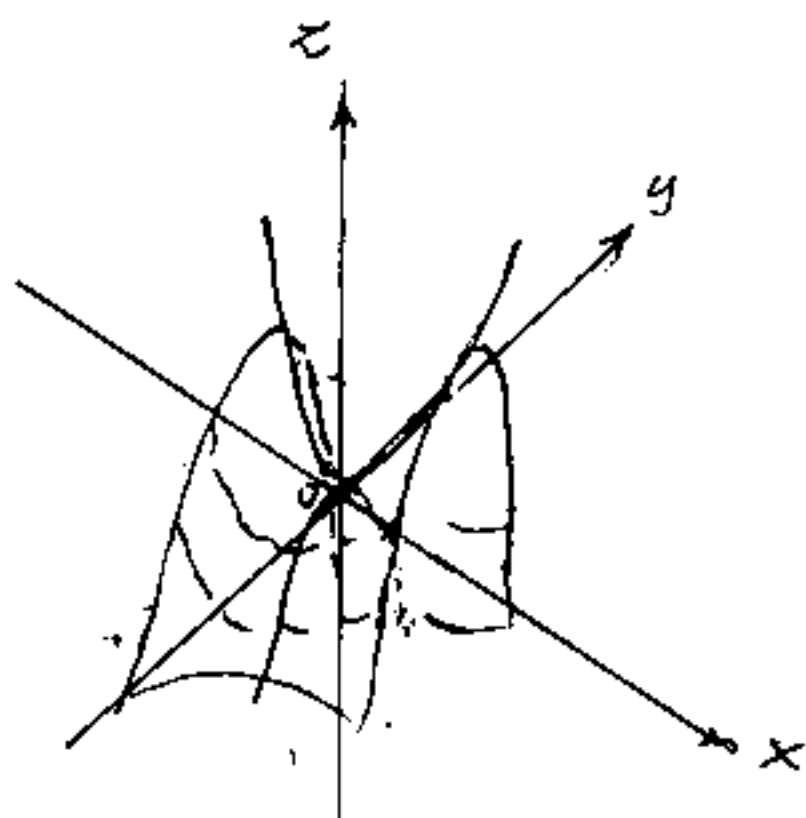
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \left[\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right)\sin(2\alpha)\right]xy = 2z$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy - 2a_{34}z = 0$$

Paraboloido iperbolico

Consideriamo una iperbole di semiassi a, b , nel piano xy , che mantengono, sui piani paralleli ad xy e definiti dalla quota z , il rapporto a^2/b^2 ; supponiamo che l'asse focale dell'iperbole, sia in x avremo:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$



Per ogni valore di z si ha l'iperbole: $\frac{x^2}{2pz} - \frac{y^2}{2qz} = 1$ ove: $\sqrt{2pz} = a$; $\sqrt{2qz} = b$; e l'iperbole giace sul piano z parallelo ad xy .

Per ogni valore di y si ha la parabola volta verso l'alto:

$z = \frac{x^2}{2p} - \left(\frac{y^2}{2q}\right)$ col vertice in $z = \left(-\frac{y^2}{2q}\right)$.

Per ogni valore di x si ha la parabola volta verso il basso: $z = -\frac{y^2}{2q} + \left(\frac{x^2}{2p}\right)$ col vertice in $z = \left(\frac{x^2}{2p}\right)$.

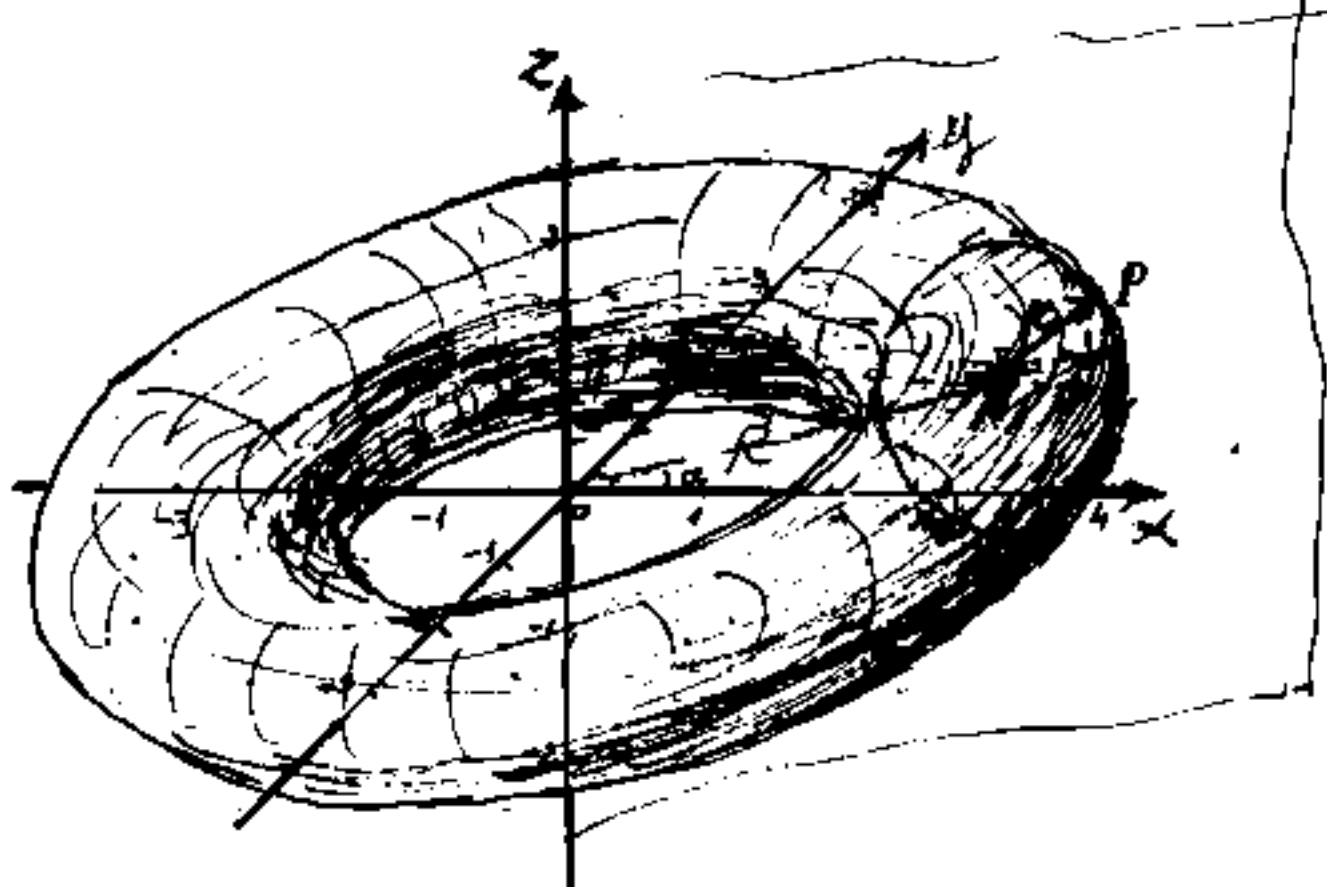
Si ottiene così quella che si chiama una superficie a sella ove in o abbiamo un massimo

per la parabola $z = -\frac{y^2}{2q}$ ed un minimo per la parabola $z = \frac{x^2}{2p}$. (vedi calcolo dei massimi e minimi per le superfici $z = f(x,y)$)

Equazione della superficie torica.

Il toro è un solido di rotazione, è generato da un cerchio di raggio r il cui piano è comune all'asse di rotazione distante R dal centro del cerchio.

Per semplicità, assumiamo l'asse Z come asse comune ai piani ruotanti su cui giace il cerchio generatore. L'insieme di tali piani può



essere espresso dalla formula (parametrica in α):

$$y = (\tan \alpha) x$$

D'altra parte l'equazione del cerchio di raggio r , avente il centro C $x_c = R \cos \alpha$; $y_c = R \sin \alpha$; $z_c = 0$; può ricavarsi dall'equazione della sfera:

$$(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2 = r^2$$

Poiché: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
sostituendo:

$$\left(x - \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + z^2 = r^2$$

e sviluppando:

$$x^2 + R^2 x^2 \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2Rx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y^2 + \frac{R^2 y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2Ry^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + R^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} - 2R \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2 = r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + (R^2 - r^2) = 0}$$

che è l'equazione della superficie torica

per $y=0$ si ha:

$$\boxed{(x \pm R)^2 + z^2 = r^2} \quad \begin{array}{l} \text{(equazione delle due circonferenze} \\ \text{di sezione)} \end{array}$$

per $z=0$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + R^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} = r^2$$

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 = r^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (R \mp r)$$

$$\boxed{(x^2 + y^2) = (R \mp r)^2} \quad \begin{array}{l} \text{(equazione delle due circonfe-} \\ \text{renze della corona circolare)} \end{array}$$

L'equazione del toro può anche scriversi:

$$\boxed{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2}$$

che si poteva giustificare geometrica-
mente senza passaggi algebrici

Explicitando Z si ha:

$$Z = \pm \sqrt{z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}$$

che può scriversi:

$$Z = \pm \sqrt{[(z) - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)][(z) + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)]}$$

Si nota che il radicale è minore di zero se:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R) > z \quad \text{cioè: } \sqrt{x^2 + y^2} > (z + R)$$

od anche se:

$$[(z) + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)] < 0 \quad \text{cioè } \sqrt{x^2 + y^2} < (R - z)$$

quindi i raggi delle circonferenze sul piano medio del toro debbono:

$$(R - z) < \sqrt{x^2 + y^2} < (R + z)$$

affinche' il radicale dia radici reali.

Poichè sappiamo (per il teorema di Pappo e Guldino), che l'area A della superficie del toro è $A = (2z\pi)(2R\pi) =$

$$A = 4\pi^2 z R$$

e che il volume V del toro è dato da:

$$V = (z^2\pi)(2R\pi) =$$

$$V = 2\pi^2 z^2 R$$

e quindi:

$V = A \cdot z/2$ ci dà la risoluzione dell'integrale doppio di campo:

$$\iint Z dx \cdot dy.$$

Le Intersezioni (Le curve nello spazio)

Data l'equazione di una superficie qualsiasi, $f(x, y, z) = 0$, possiamo trovare subito le linee di intersezione coi piani di riferimento ponendo: $z = 0$, per xy ; $y = 0$ per xz ; $x = 0$ per yz ; e possiamo trovare come tali linee si deformano o si mantengono sui piani paralleli, ponendo l'equazione in forma parametrica, cioè ponendo: $z = K$, oppure: $y = K$, oppure: $x = K$.

Spesso lo studio di tali superfici è delimitato da un dominio sul piano xy . Se il dominio è quadrato o rettangolare con lati paralleli ad x ed y , cioè tali lati sono le tracce su xy di piani paralleli a zx e zy , abbiamo visto sopra come trovarne le linee di intersezione che si presenteranno nella forma: $z = f(x)$; $z = f(y)$ e per le quali è possibile calcolare i max ed i min con i metodi della geometria piana.

Se il dominio è delimitato da piani generici paralleli a z , le cui equazioni saranno del tipo $y = f(x)$, cioè: $y = mx + q$, basterà sostituire tali espressioni nella equazione della superficie; $f(x, y, z)$ che diventerà $f(x, z) = 0$ oppure $f(y, z) = 0$, a seconda che si sostituisca in y od in x .

Se il dominio è delimitato dalla intersezione di cilindri paralleli a z (circolari, ellittici, parabolici ecc)

Sul piano xy , tali intersezioni saranno espresse da equazioni del tipo: $f(x,y)=0$, ove se è possibile esplicitare la x o la y potremo sostituirla nella equazione della superficie, che però risulterebbero delle espressioni: $f(z,x)$ oppure $f(z,y)$ di curve non piane. Tuttavia potremo ugualmente calcolare i max ed i min che saranno valori sul bordo del dominio e possono essere max o min assoluti (non relativi), nel senso del valore più alto o più basso della z nel campo di quel dominio.

Quando si tratti di bordi cilindrici (intersezione del cilindro delimitante il campo con la superficie data), per vedere in piano la curva possiamo sviluppare in piano la superficie cilindrica, come già abbiamo fatto con la sezione piana del cilindro (vedi vol II) ove l'ellisse diventa una sinusoidale. Oppure possiamo esprimere la $f(x,y)$ del dominio in forma parametrica (per esempio un cerchio al centro di raggio R di equazione: $x^2+y^2=R^2$ può scriversi: $x=R\cos\varphi$; ed $y=R\sin\varphi$, che sostituite in z avremo $z=f(\varphi)$). Con questo metodo è facile, per esempio, rappresentare l'elica cilindrica: $x=R\cos\varphi$; $y=R\sin\varphi$; $z=\frac{p}{2\pi}\varphi$ (p = passo). Ove il triangolo rettangolo di cateti $2R\pi$ e p avvolto sul cilindro è l'elica.

Analogamente le intersezioni fra superfici, o
spesso le linee non possono essere sviluppate in
piano; siano $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ le due superfici
di cui interessa la linea intersezione. Se riusciamo
ad eliminare una variabile fra le due equazioni
cioè la x o la y o la z otteniamo espressioni in
due variabili: $f(y, z) = 0$; $f(x, z) = 0$; $f(x, y) = 0$, che
rappresentano la proiezione della curva rispettiva-
mente sui piani yz , xz , xy . e che ci permettono
di capire (disegnare) la linea spaziale.

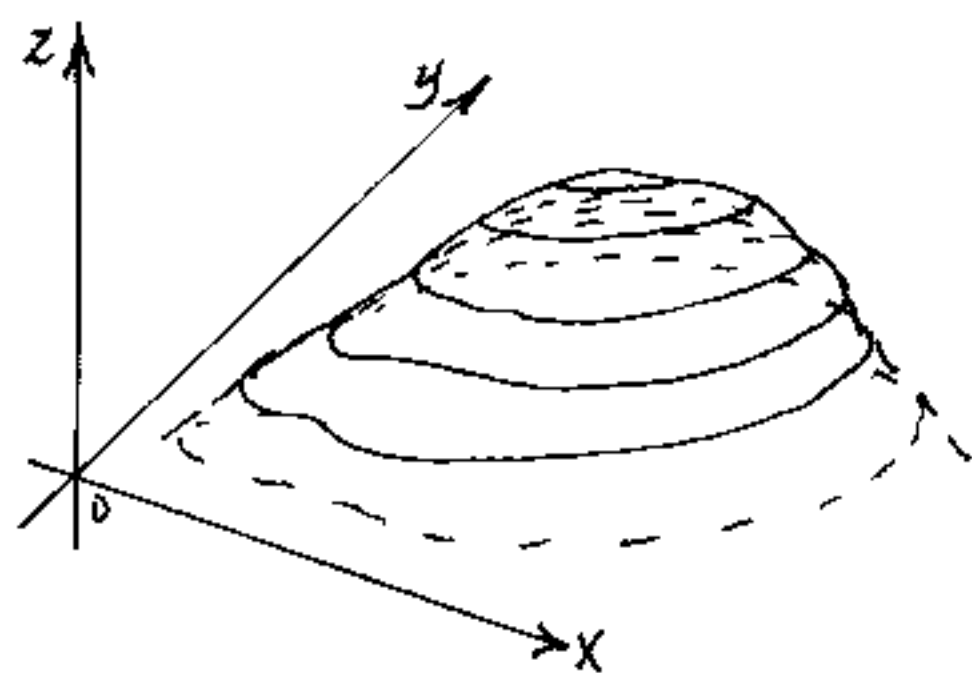
Studiamo quindi sistematicamente le funzioni
in due variabili.

Le funzioni in due variabili

Sia $z = f(x, y)$ una funzione nelle due variabili indipendenti x, y . Ciò vuol dire che se alla x ed alla y , assegniamo valori numerici, per ogni coppia di valori (x_p, y_p) resta determinato, nel piano xy , un punto $P \equiv (x_p, y_p)$. Se sostituiamo le coordinate di P nella espressione: $z = f(x, y)$ avremo un nuovo valore numerico: $z_p = f(x_p, y_p)$, coordinata di P in z , quindi i tre valori numerici (x_p, y_p, z_p) determinano univocamente la posizione di P , nello spazio tridimensionale riferito alla terna cartesiana $(0, x, y, z)$.

Si noti che x, y, z , non sono, in genere indipendenti fra loro, infatti la $z = f(x, y)$ rappresenta una superficie, (ondulata, curva, o piana) ove la z , punto per punto, rappresenta "la distanza" di tale superficie dal piano xy .

Consideriamo quindi la superficie $z = f(x, y)$



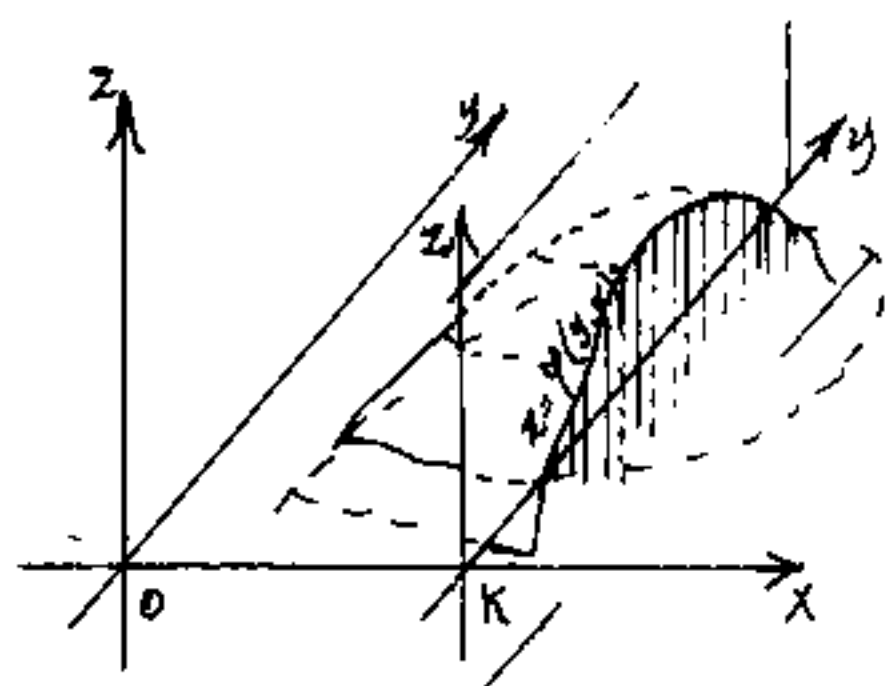
come una specie di collinetta che interseca il piano xy , e le sue "isopse" sono le intersezioni con i piani paralleli ad xy .

L'espressione $z = f(x, y)$ può anche scriversi nella forma implicita: $f(x, y, z) = 0$, in questo caso non possiamo più dire quali delle tre variabili sia dipendente dalle altre due. Certo che assegnati valori numerici a due variabili, resta determinato il valore numerico della terza. Cioè l'espressione $f(x, y, z) = 0$ può scriversi: (indicizzando la funzione) $z = f_z(x, y)$; $y = f_y(x, z)$; $x = f_x(y, z)$; ove f_z, f_y, f_x sono diverse pur essendo esplicitazione di una stessa funzione.

Consideriamo ora un nuovo aspetto della $f(x, y, z) = 0$. Se in questa funzione attribuiamo un valore numerico ad una sola variabile, otteniamo una funzione che lega le altre due variabili. Per esempio se attribuiamo alla z il valore zero, abbiamo una $f(x, y) = 0$ ove esplicitando la x o la y si ottiene: $y = \varphi(x)$, che rappresenta la curva intersezione fra la superficie: $z = f(x, y)$ ed il piano $z = 0$, che è il piano xy .

Se alla z attribuiamo il valore n (parametro) avremo che $f(x, y) = n$ ove esplicitando x ed y si ha: $y = \varphi(x, n)$ che rappresenta la curva intersezione della $f(x, y, z)$ col piano $z = n$ (distante n dal piano x, y). Abbiamo così l'equazione parametrica in n delle isoipse della collinetta.

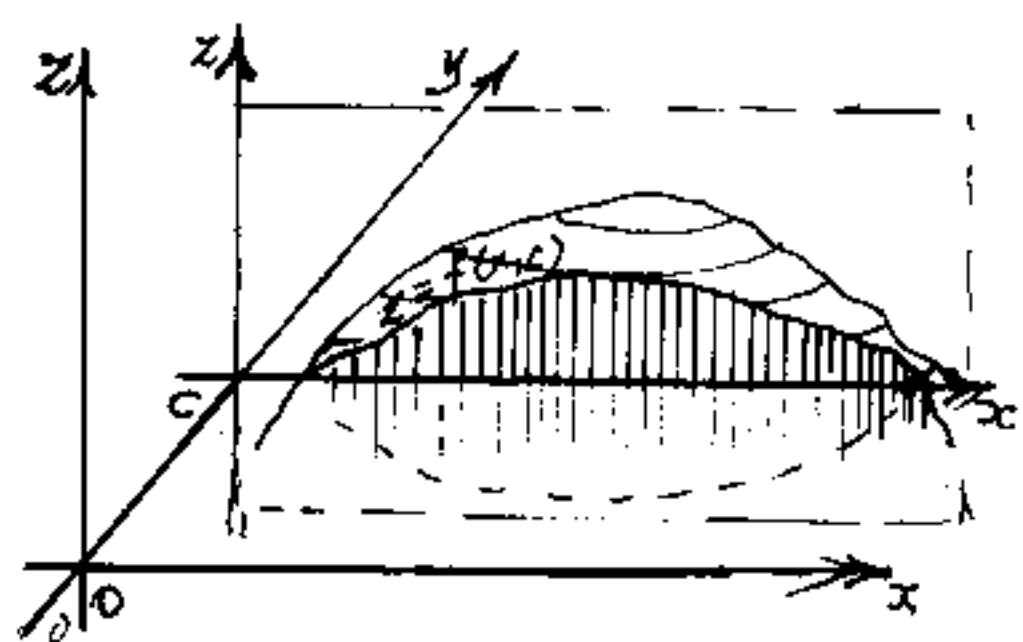
Se invece nella nostra $f(x, y, z) = 0$ attribuiamo va-
lori numerici alla x , il che equivale a dire: $x = \kappa = \text{cost.}$
cioè la: $x = \kappa$ rappresenta un piano parallelo al piano
 yz e distante κ da esso. Questo piano taglierà



la superficie $f(x, y, z) = 0$,
esplicitata in $f(x, y) = z$
secondo una curva che
è $z = \varphi(y, \kappa)$ giacente
sul piano κ , per la qua-
le è possibile calcolare le

derivate: $\frac{dz}{dy}$ essendo κ una costante.

Analogo discorso se attribuiamo valori numerici
alla y , questa volta il piano $y = c = \text{cost.}$, parallelo
al piano xz , taglierà la superficie secondo una

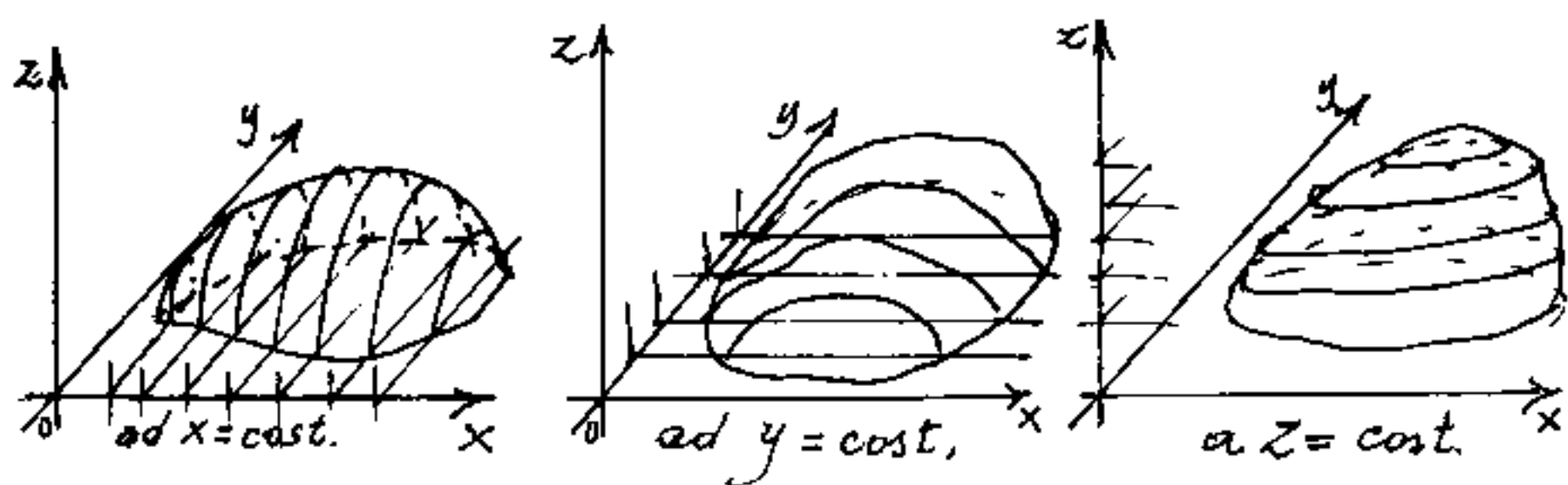


curva $z = f(x, c)$.
che è possibile derivare
e in $\frac{dz}{dx}$, essendo c
da riguardare come
costante numerica (pa-
rametro).

Torniamo quindi alla nostra $z = f(x, y)$ ove
non è necessario attribuire alla x , oppure
alla y specifici valori numerici, basta ci =

guardare la x oppure la y , come fossero delle costanti parametriche, ed allora, ad $x = \text{costante}$, si può vedere la nostra collinetta tagliata a fette con piani paralleli a zy , ed ogni taglio è una curva da riguardare come una $z = f(y)$ ove la x deve essere considerata una costante.

Analogo discorso ad $y = \text{cost.}$ ove le "fettine" sono parallele ad xz .



Da questo modo di riguardare una $f(x, y)$ (che abbiamo posto $z = f(x, y)$) discendono molti concetti particolari: noi esamineremo le derivate parziali ed i differenziali totali, il dominio di una funzione, i massimi e minimi assoluti e relativi, gli integrali doppi di campo ed il calcolo dei volumi.

Quanto abbiamo esposto è fondamentale per comprendere i concetti che andiamo ad esaminare.

3 differenziali totali (e derivate parziali).

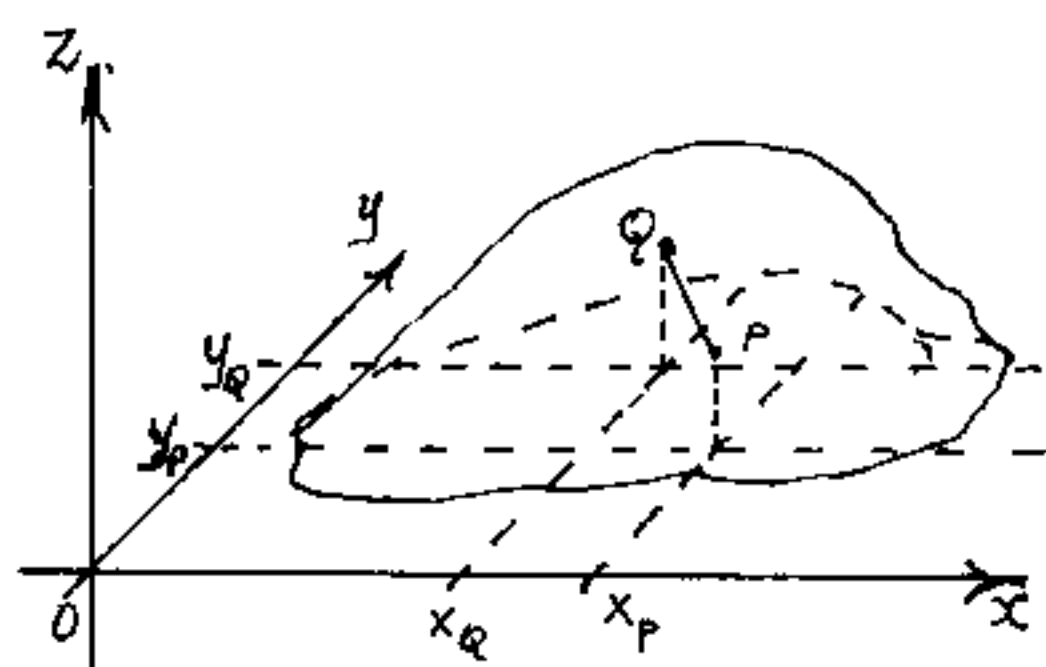
Abbiamo già visto il differenziale come variazione infinitesima di una variabile.

Dicesi differenziale totale di una funzione in più variabili, la variazione infinitesima $df(x, y, z, t, \dots)$ al variare infinitesimo delle variabili indipendenti.

Nel nostro caso: $z = f(x, y)$ cerchiamo $df(x, y) = dz$ al variare dx (della x) e dy (della y) ove dx e dy sono le variazioni infinitesime di x e di y .

Considerato quindi un punto P della funzione z , definito da $z_P = f(x_P, y_P)$ possiamo considerare l'intorno di P come: $f(x_P + dx, y_P + dy)$.

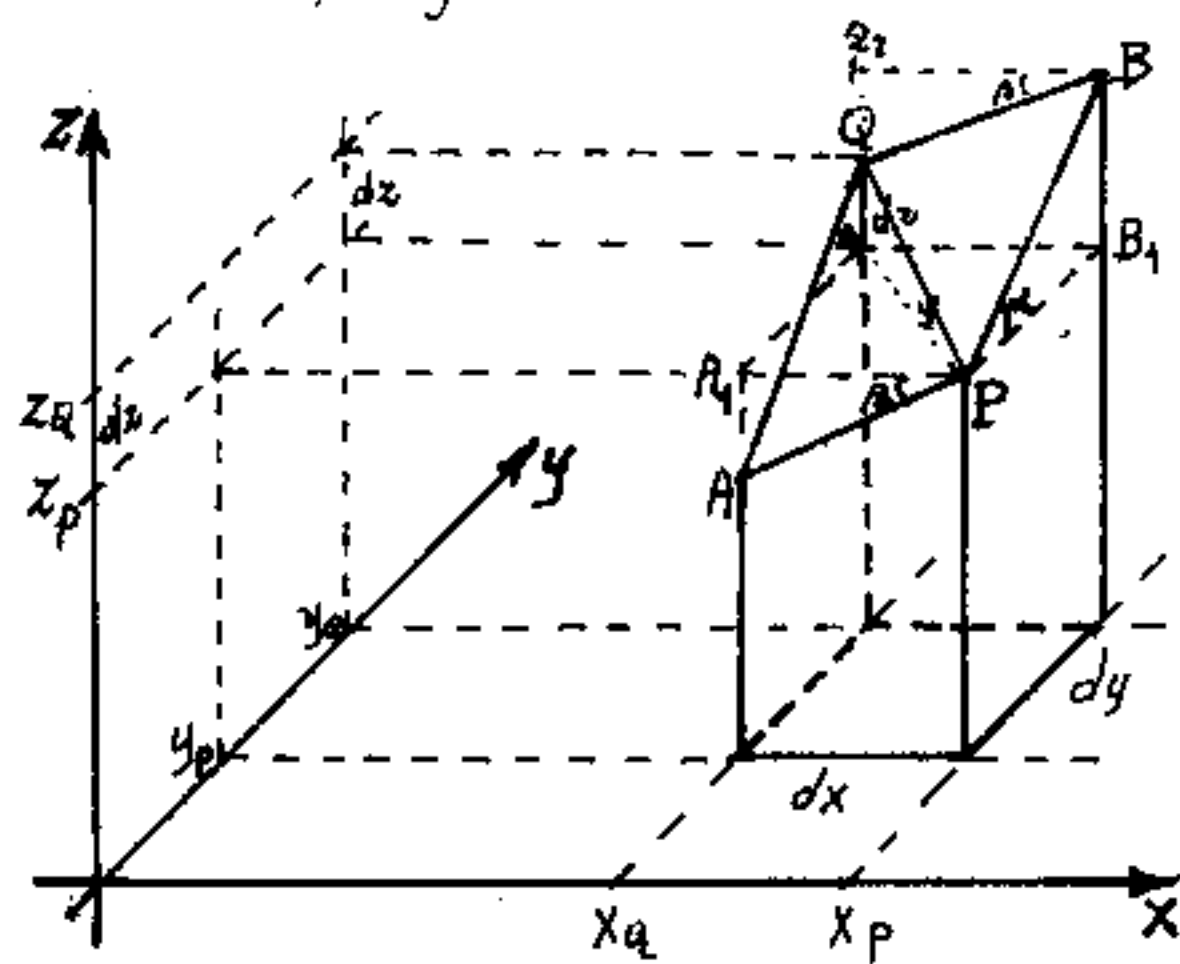
Esaminiamo il solido prismoide con base quadrilatera di lati dx e dy e con spigoli paralleli a z . La base superiore, (in genere non parallela alla base inferiore) è porzione infinitesima della superficie $z = f(x, y)$. (che può considerarsi piana perché infinitesima).



Nel disegno, si noti che, per passare da P a Q , l'incremento in x è negativo, ed in y è positivo; cioè

per evidenziare che l'intorno di P è in tutte le direzioni come già indicato ponendo il doppio segno nella $f(x_p + (\pm dx), y_p + (\pm dy))$, cosa non ortodossa, ma per fermare l'attenzione come sarà gestito il segno nei differenziale, e comprendere il concetto di derivata direzionale.

Supponiamo che la distanza $\overline{PQ}$ sia infinitesima e cerchiamo di disegnare piuttosto ingrandito il nostro prismaide di base infinitesima: dx, dy . Noi cerchiamo il valore della var-



iazione infinitesima " dz " per passare da P a Q .

cioè:

$$dz = z_q - z_p$$

$$dx = x_q - x_p$$

$$dy = y_q - y_p$$

Tagliamo a

$z = \text{cost} = z_p$ la nostra collinetta, per cui il prismaide sarà sezionato secondo A, P, B, Q , (punti tutti alla stessa quota z_p). Ove: $\overline{A,P} = \overline{B,Q} = dx$; $\overline{P,B} = -\overline{Q,A} = dy$, essendo la figura di sezione parallela alla base sul piano xy .

Per andare da P a Q , possiamo considerare tre diversi percorsi: PAQ ; PBQ ; PQ .

Se consideriamo di tagliare la superficie con piani ad $x = \text{cost}$, per $x = x_p$, troviamo il triangolo infinitesimo: PB_1B , ove $\overline{PB_1} = dy$ e $\overline{PB}$ è l'intersezione del piano con la superficie: $z = f(x, y)$ cioè $\overline{PB}$ è il segmento infinitesimo della curva $z = f(y)$ giacente sul piano: $x = x_p$.

La pendenza in P di tale curva sarà la derivata rispetto ad y della $z = f(y)$ ove x_p è una costante. Cioè avremo: $\frac{d f(y)}{d x} \bigg|_{x=x_p} = \text{tg} \alpha$. Ma x_p potrebbe non essere definito, tuttavia possiamo riguardare la x come fosse una costante, in tal caso, la derivata non è più un rapporto di differenziali, si chiama: derivata parziale della $f(x, y)$ rispetto ad y , si indica con una ∂ (d curva) anziché (d dritta) e si scrive:

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(z)}{\partial y} \Delta x = \text{cost.}$ ed è ovviamente ancora la pendenza del tratto $\overline{PB}$ cioè: $\text{tg} \alpha$. (tale pendenza sarà positiva o negativa e gestirà il segno di cui si è già parlato).

Il segmento $\overline{B_1B} = z_B - z_P$ sarà: $\overline{BB_1} = \text{tg} \alpha \cdot (\overline{PB_1}) = \text{tg} \alpha \cdot dy$

$$\boxed{\overline{BB_1} = \frac{\partial z}{\partial y} dy}$$

Discorso del tutto analogo se sezioniamo ad $y = \text{cost.}$
per $y = y_p = \text{cost.}$, avremo il triangolo infinitesimo
 $AP A_1$ ove: $\text{tg } \beta = \frac{\partial z}{\partial x}$ e dove $z_A - z_{A_1} = \overline{AA_1} = \frac{\partial z}{\partial x} dx$.

Abbiamo, di proposito, fatto in modo, nel disegno
che dx fosse: $|(x_p - x_q)|$ invece di $(x_q - x_p)$, cioè in mo-
do che A risultasse a quota inferiore, cioè per ar-
rivare al punto Q (stessa x di A) occorresse un dx (negativo)
mentre il dy è positivo. Ciò non varia niente come
è possibile constatare: (vedi figura)

Se passiamo da P a Q avremo: $dZ = \overline{Q_1Q} = \overline{B_1B} + (-\overline{Q_1Q})$

$$dZ = \overline{Q_1Q} = \overline{B_1B} + (-\overline{AA_1})$$

Se passiamo da P a Q avremo $dZ = \overline{Q_1Q} = (-\overline{AA_1}) + \overline{B_1B}$

e la formula diventa:

$$\overline{Q_1Q} = \boxed{dZ = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy}$$

Questa espressione è detta:

derivata totale di $Z = f(x, y)$

Se avessimo fatto il percorso diretto PQ avremmo

$$\overline{PQ_1} = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{ove dividendo: } \frac{dZ}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \text{tg } \varphi \quad \text{che}$$

è la pendenza del segmento PQ cioè la derivata
in direzione PQ della $f(x, y)$.

Derivate direzionali

Definiamo derivata direzionale:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \left(\frac{f(Q) - f(P)}{\overline{QP}} \right)$$

Sia $\overline{PQ}$ su una retta "n" di coseni direttori:

$$\cos(\hat{n}x) ; \cos(\hat{n}y) ; \cos(\hat{n}z)$$

e sia $ds = \overline{PQ}$ = lunghezza infinitesimo, dell'archetto $\widehat{PQ}$

essendo $\widehat{PQ}$ infinitesimo avremo che:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P)}{\overline{QP}} = \frac{df(P)}{ds} = \text{derivata direzionale.}$$

$$\text{ma: } ds \cdot \cos(\hat{n}x) = dx ; ds \cdot \cos(\hat{n}y) = dy ; ds \cos(\hat{n}z) = dz$$

perciò:

$$\left(\frac{\partial f(P)}{\partial n} \right)_{(P_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(P_0)} \cos(\hat{n}x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(P_0)} \cos(\hat{n}y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(P_0)} \cos(\hat{n}z)$$

è la derivata direzionale della:

$$\underline{f(P) = f(x, y, z)}$$

Nel trattare i differenziali totali abbiamo introdotto il concetto di derivata parziale. Naturalmente la espressione: "differenziale totale" si può estendere a funzioni di più variabili: $F = f(x, y, z, t, \dots)$

avremo:
$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Le derivate parziali di ordine superiore (Il criterio di Schwarz)

Se riguardiamo $\frac{\partial z}{\partial x}$; oppure $\frac{\partial z}{\partial y}$, come funzioni, possiamo derivare di nuovo ad $y = \text{cost.}$, oppure ad $x = \text{cost.}$, avremo così quattro tipi di derivate seconde:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{derivata seconda di } z \text{ rispetto} \\ \text{ad } x \text{ due volte} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \left(\begin{array}{l} \text{derivata seconda mista di } z \\ \text{rispetto ad } x \text{ e rispetto ad } y. \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{derivata seconda mista di } z \\ \text{rispetto ad } y \text{ e rispetto ad } x. \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{derivata seconda di } z \text{ rispetto} \\ \text{ad } y \text{ due volte} \end{array} \right)$$

Il criterio di Schwarz.

- Se siamo partiti da una funzione $z = f(x, y)$ è facile verificare che si ha l'uguaglianza:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

Questa uguaglianza ordinariamente chiamata CRITERIO di SCHWARZ ci consente un notevole procedimento inverso, infatti ci consente di definire se il nostro differenziale totale è un differenziale esatto.

Cerchiamo di capire cosa vuol dire "differenziale esatto".

- Se abbiamo una espressione del tipo:

$$\boxed{P(x, y) dx + Q(x, y) dy}$$

ove: $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono polinomi in x ed y .

(espressioni ove figurano dx , dy , oppure y' , y'' sono dette differenziali)

Ci domandiamo se esiste una funzione $z = f(x, y)$ tale che: $\boxed{dz = P(x, y) dx + Q(x, y) dy}$ ove evidentemente integrando:

$$\int dz = z$$

potremo risalire alla funzione quando sia noto il suo differenziale totale.

A tal fine riguardiamo $P(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y)$$

per vederlo meglio scriviamo:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

Per il criterio di Schwarz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

applicandolo alla nostra espressione avremo:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} ; \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

cioè il polinomio moltiplicato per dx lo deriviamo rispetto ad y ; e quello moltiplicato per dy lo deriviamo rispetto ad x .

Se si verifica l'uguaglianza:

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

allora esiste una funzione z detta: Funzione Potenziale tale che il suo differenziale totale è l'espressione differenziale in esame, e quindi, poiché $\int_a^b dz = (b-a)$ si suol dire che: il suo integrale dipende solo dai limiti di integrazione, cioè che: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ è un differenziale esatto; ammette funzione potenziale.

Se invece:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Non esiste una definita funzione $Z = f(x,y)$ tale che il suo differenziale totale corrisponda alla espressione in esame e quindi:

$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$ non è un differenziale esatto; il suo integrale non dipende solo dai limiti di integrazione, (punto di arrivo e punto di partenza) ma dipende dal cammino percorso di integrazione.

Facciamo alcuni esempi.

In assenza di attriti, il lavoro per sollevare un certo peso ad una certa altezza, in campo gravitazionale, non dipende dal cammino percorso; si può sollevare direttamente il peso, o si può portarlo in alto tramite un lungo piano inclinato, il lavoro è sempre lo stesso ed è la forza per il suo spostamento cioè $(forza \cdot peso) \cdot (altezza)$.

(Il campo gravitazionale ammette potenziale, che equivale a dire che le forze sono conservative e che il campo è solenoidale).

Se invece consideriamo una trasformazione termodinamica ove per passare dal punto A a pressione p_1 e volume V_1 al punto B a pressione p_2 e volume V_2 , l'integrazione dipende dal cammino percorso (il differenziale calore non è un differenziale esatto)

Piano tangente ad una superficie

retta normale ad una superficie

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto appartenente alla superficie: $z = f(x, y)$.

La normale alla superficie in P_0 è una retta di giacitura del piano tangente in P_0 ed avrà per equazione:

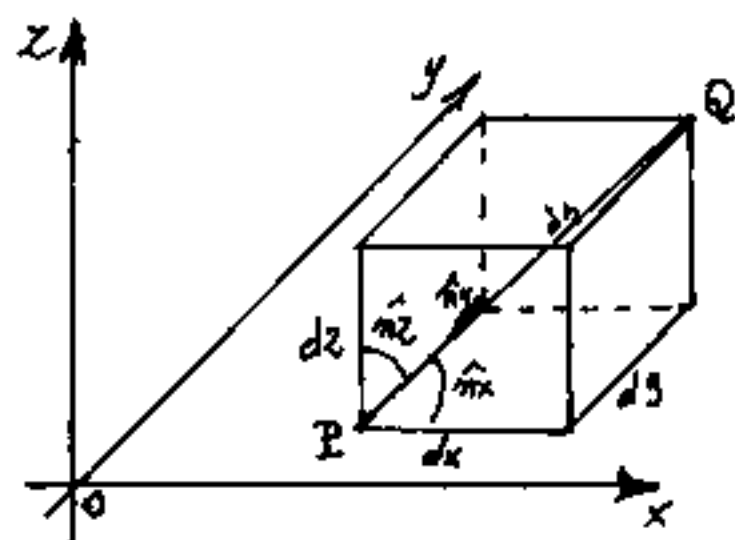
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

mentre l'equazione del piano tangente in P_0 sarà:

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

abbiamo determinare: l, m, n , che sono proporzionali ai coseni direttori.

Abbiamo visto che se P e Q sono due punti vicinissimi sulla stessa super-



ficie: $z = f(x, y)$, i coseni direttori della retta in direzione $\overline{PQ}$ sono, se $\overline{PQ} = ds$:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \hat{n}_x; \quad \frac{dy}{ds} = \cos \hat{n}_y;$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos \hat{n}_z. \text{ Ma } ds \text{ è infinitesimo per cui la retta}$$

di P_0Q è tangente alla superficie $z = f(x, y)$ ed

avrà per equazione:

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

La doppia uguaglianza esprime che gli incrementi: $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ sulla retta sono proporzionali rispettivamente a: dx , dy , dz .

$$\text{ma: } dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

quindi anche:

$$(z-z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y-y_0)$$

ma questa è l'equazione di un piano:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y-y_0) - (z-z_0) = 0}$$

ed è soddisfatta da tutte le rette tangenti in P_0 , cioè è l'equazione del piano tangente in P_0 (luogo di tutte le rette tangenti in P_0).

Confrontata con l'equazione:

$$l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0$$

$$\text{abbiamo: } l = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad n = -1$$

Per cui i coseni direttori della retta normale "n" in P_0 alla superficie $z = f(x, y)$, saranno:

$$\cos(\hat{n}\hat{x}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}; \quad \cos(\hat{n}\hat{y}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos(\hat{n}\hat{z}) = \frac{+1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

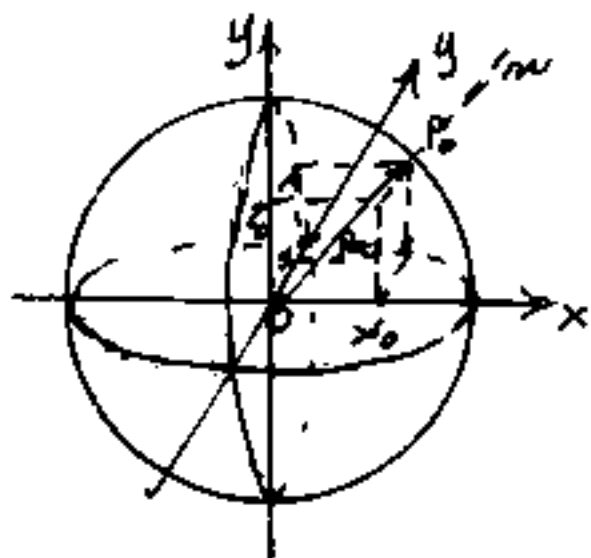
Quindi l'equazione della retta normale in P_0 alla superficie: $z = f(x, y)$ sarà:

$$\frac{(x - x_0)}{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{(y - y_0)}{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}} = (z - z_0)$$

Facciamo un esempio:

Sia: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ l'equazione di una sfera al centro assi, e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto sulla superficie sferica.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$



$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{z}$$

perciò:

$$\cos(\hat{n}\hat{x}) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{x_0}{R}$$

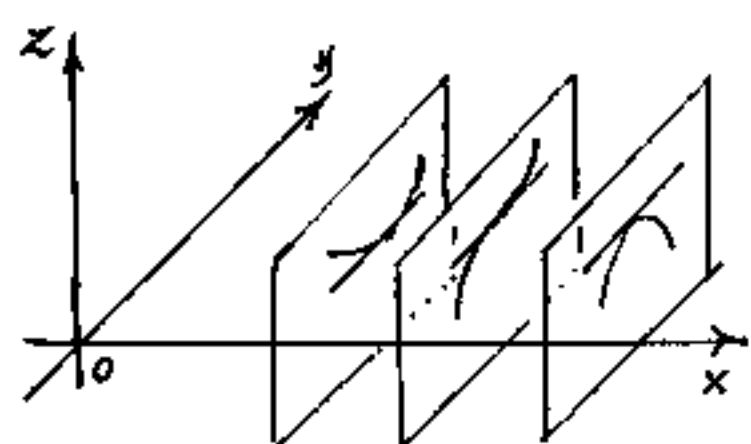
$$\cos(\hat{n}\hat{y}) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{y_0}{R}$$

$$\cos(\hat{n}\hat{z}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{z_0}{R} \quad (\text{vedi figura})$$

Massimi e Minimi relativi - L'Hessiano

Abbiamo visto che la: $\frac{\partial f}{\partial y}$ è la pendenza della linea tracciata dalla superficie: $z = f(x, y)$ sui piani: $x = \text{costante}$.

Che la $\frac{\partial f}{\partial x}$ è la pendenza della linea tracciata dalla stessa superficie sui piani $y = \text{cost.}$

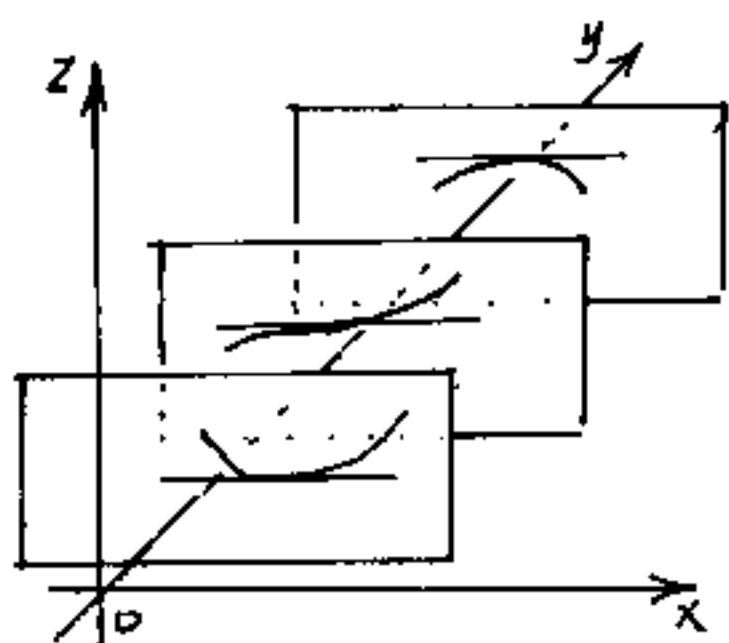


consideriamo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

(vedi figura),

Si ha in tre casi diversi: minimo, flesso orizzontale, o massimo della linea intersezione della superficie coi piani $x = \text{cost.}$



Analogamente per le intersezioni sui piani ad $y = \text{cost.}$ quando:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0}$$

perciò:

Condizione necessaria, ma non sufficiente affinché una superficie presenti un massimo od un minimo relativo è che siano nulle entrambe

le derivate parziali: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial f}{\partial x} = 0}$

Pero' affinché si abbia un massimo od un minimo della $z = f(x, y)$, entrambe le linee di intersezione coi piani ad $x = \text{cost}$ ed $y = \text{cost}$ debbono concordare sul massimo o sul minimo; infatti se per una delle linee è un massimo, e per l'altra un minimo si ha una superficie "a sella", cioè se per le intersezioni



con piani ortogonali ad un variabile si ha una famiglia di curve con curvatura verso l'alto,

le intersezioni con piani ortogonali all'altra variabile da' una famiglia di curve con curvatura verso il basso, in questo caso nel punto V della figura non possiamo dire che vi è un max od un min.

Nel piano per distinguere i max, i min, ed i flessi, utilizzavamo il segno della derivata seconda.

cioè $\frac{d^2 f}{dx^2} \leq 0$ indicava rispettivamente: max, flesso, min. Estendiamo queste osservazioni al nostro caso. Intanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nel punto P_0 debbono avere lo stesso segno ed essere diverse da zero affinché possa esservi un max od un min.

Una osservazione più acuta si ha con la derivata mista la: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si può scrivere: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y}$,

esso indica la variazione della pendenza $\frac{\partial f}{\partial x}$ sui piani $y = \text{cost.}$ Poiché $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ il loro prodotto può solo essere maggiore o al più uguale a zero.

È detto Hessiano il determinante delle derivate seconde, ove le miste sono la diagonale secondaria:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0 \rightarrow \text{si hanno max o min} \\ = 0 \rightarrow \text{non si può dire niente} \\ < 0 \rightarrow \text{non si hanno max o min} \end{matrix}$$

$$H > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \begin{cases} > 0 & (\text{minimo}) \\ < 0 & (\text{massimo}) \end{cases}$$

Il procedimento di ricerca dei massimi e minimi relativi su una superficie $z = f(x, y)$ consiste inizialmente nel porre: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si hanno così due equazioni in x ed y , ove, se esistono punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ che le soddisfano, in questi punti possono esservi max o min, ma è necessario calcolare l'Hessiano per accettarne l'esistenza.

Conviene sempre una analisi della $z = f(x, y)$ che tal volta può evitarci il calcolo dell'Hessiano spesso piuttosto lungo.

Per esempio: $Z = ax^2 + by^2 + c$, sappiamo che è un paraboloide ellittico (vedi quadriche), con asse coincidente con z , vertice in c , volto verso l'alto per cui in c abbiamo un minimo. I semiasse dell'ellisse sono: $|\sqrt{\frac{z-c}{a}}|$; $|\sqrt{\frac{z-c}{b}}|$; e l'equazione degli ellissi, parametrica in z è:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{z-c}{a}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{z-c}{b}}\right)^2} = 1$$

(Ricordiamo che $(\sqrt{n})^2 = n$; $\sqrt{n^2} = \pm n$)

Facciamo ora le derivate:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2ax = 0 \rightarrow x_p = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2by = 0 \rightarrow y_p = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 2a; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2b; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0;$$

e l'Hessiano sarà:

$$H = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0$$

(con $a > 0$; $b > 0$)

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 2a > 0 \rightarrow \text{minimo in } P_0 = (0, 0, c)$$

Consideriamo l'equazione:

$$z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$

sappiamo che è una quadrica e troveremmo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$
 cioè un iperboloido a due fogli, ove per $x=y=0$, si
 ha: $z = \pm b$. con z = ass. di rotazione.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} = 0 \text{ per } x=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{a} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} = 0 \text{ per } y=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{b}{a} \left(\frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}}{(x^2 + y^2 + a^2)} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{b}{a} \left(\frac{(y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{b}{a} \left(\frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{0 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}}{(x^2 + y^2 + a^2)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(xy)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{(y^2 + a^2)(x^2 + a^2) - x^2 y^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^3} = (\text{Hessiano})$$

$$H = \frac{-x^2 y^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^3} = \frac{a^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} > 0. \begin{pmatrix} \text{assume} \\ \text{max} \\ \text{e min} \end{pmatrix}$$

per $x=0$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \gtrless 0$
 a seconda del
 segno della radice
 del denominatore.
 può essere sia max,
 sia min.

Massimi e Minimi relativi e assoluti

Prima di tutto occorre decidere se la zona della superficie che abbiamo in esame, è limitata o indefinita.

Si dice: "Dominio" la proiezione sul piano xy della zona di superficie in esame. - Si dice codominio l'insieme dei valori della z in tale zona. Il dominio quindi può essere delimitato da funzioni $y=f(x)$ che formino, con le loro intersezioni, un perimetro atto a delimitare un'area, le $y=f(x)$, possono essere rette, o gli stessi assi x, y , od archi di cerchi, o curve piane qualsiasi.

Ma la delimitazione della zona, può dipendere dalla stessa $z=f(x,y)$, (per esempio uno sfera, un ellissoide, od un cilindro con asse parallelo a z). Nel caso della sfera possiamo scegliere, come dominio, solo figure interne alla proiezione del suo cerchio massimo, per avere valori reali del codominio; però in questo caso occorre scindere il codominio in due parti, cioè $+\sqrt{\quad}$ e $-\sqrt{\quad}$ cioè occorre scindere l'equazione della sfera, esplicitata in z , in due funzioni monodrome. (Il termine "funzione" è sempre per relazioni monodrome.

Nell'esempio precedente (iperboloide a due falde)

$$z_1 = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} ; \quad z_2 = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} .$$

z è detto massimo e minimo assoluto, nel dominio precisato, rispettivamente il più alto ed il più basso valore assunto dallo z sia internamente che sul bordo del dominio; sono esclusi i valori esterni al dominio.

Sono detti massimi e minimi relativi, nel dominio precisato, (e possono essere molteplici, mentre gli assoluti sono unici) i punti nei quali è possibile pensare un piano tangente parallelo ad xy , (orizzontale) tale che il valore della z nel punto, sia il più alto o il più basso dei valori della z nei punti dell'intorno, ed i punti dell'intorno si conserino tali che la z e le sue derivate siano continue in tale intorno, cioè il punto non sia una cuspidale. (Il vertice di un cono non può essere un max o min relativo)

In una $y = f(x)$, si dice estremante il valore della x che rende max. o min. la y . Si dice estremale il valore della x che riveste condizioni necessarie ma non sufficienti affinché la y sia max o min. Per esempio i valori della x e della y per cui $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sono estremali, diventano estremanti se $H > 0$.

In un dominio esistono sempre un max e un min assoluti, mentre possono non esserci, o essere unici o molteplici i relativi.

Consideriamo la funzione:

$$f(x,y) = Z = \sin x + \cos(x+y) + \sin y$$

Si nota che l'espressione è simmetrica, cioè x ed y sono scambiabili fra loro per qualunque valore di z .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x+y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \sin(x+y) = 0 \end{cases} \quad (\text{sottraendo})$$

$$\cos x - \cos y = 0 \rightarrow \boxed{\cos x = \cos y}$$

cio' vuole dire:

$$\boxed{x = y} \quad (\text{o meglio}) \quad (x \pm 2k\pi = y \pm 2k\pi)$$

$$\text{ma: } \cos \alpha = -\cos \alpha \quad \text{perciò: } \boxed{y = \pm x}$$

$$\text{Si hanno cioè due condizioni: } \boxed{y = x} \quad \text{ed} \quad \boxed{y = -x}$$

Sostituiamo nella prima equazione: $y = x$,

$$\text{avremo: } \cos(x) - \sin(x+x) = 0$$

$$\cos x = 2 \sin x \cos x \rightarrow$$

$$\boxed{\sin x = \frac{1}{2}}$$

$$\text{da cui: } \begin{cases} x = \pi/6 & ; & y = \pi/6 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5\pi/6 & ; & y = 5\pi/6 + 2k\pi \end{cases}$$

Le due coppie di valori soddisfano entrambe le equazioni, infatti $\cos \frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2\frac{5\pi}{6}\right)$, non è invece lecita la coppia $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ e neppure $x = \frac{\pi}{6}$; $y = -\frac{\pi}{6}$ perché si annullano della seconda condizione.

Sostituiamo nella I equazione: $y = -x$,

avremo: $\cos x = \sin(0) = 0$ $\cos x = 0$

da cui: $x = \frac{\pi}{2}$; $y = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$x = \frac{3\pi}{2}; \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

in questo caso valgono anche le coppie

$$x = \frac{\pi}{2}; \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{2}; \quad y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

infatti:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \sin\left(2\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Si hanno così sei coppie di valori che annullano le derivate parziali prime.

Eseguiamo ora, ordinatamente, le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x) - \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(y) - \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos(x+y)$$

avremo l'Hessiano:

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$H = \left[\sin(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(x+y) + \sin(y) \cos(x+y) + \cos^2(x+y) \right] - \left[\cos^2(x+y) \right]$$

$$H = \sin x \sin y + \cos(x+y) [\sin x + \sin y]$$

Sostituendo nell'Hessiano ordinatamente le sei coppie di valori: $x; y$, abbiamo:

$$1) \boxed{x=y=\frac{\pi}{6}}; H = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) (2 \sin \frac{\pi}{6}) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\boxed{H = \frac{3}{4} > 0}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 < 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = -1 < 0} \text{ perciò per } x=y=\frac{\pi}{6}, \text{ si ha } \underline{\text{massimo}}$$

$$Z = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}; \quad Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{Z = \frac{3}{2}}$$

$$2) \boxed{x=y=\frac{5\pi}{6}}; H = \sin^2 \left(\frac{5\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) (2 \sin \frac{5\pi}{6}) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{3}{4} > 0}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = -\sin \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{-1 < 0} \text{ massimo}$$

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{Z = \frac{3}{2}}$$

$$3) \boxed{x=y=\frac{\pi}{2}}; H = \sin^2 \frac{\pi}{2} + (\cos \pi) (2 \sin \frac{\pi}{2}) = (+1) - (1)(2)(1) = \boxed{-1 < 0}$$

in questo caso $\boxed{H < 0}$ non si ha né massimo né minimo.

$$Z = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = +1 - 1 + 1 = \boxed{Z = 1}$$

$$4) \boxed{x=y=\frac{3}{2}\pi}; H = \sin(\frac{3}{2}\pi) + \cos(3\pi)(2\sin\frac{3}{2}\pi) = +1 + (-1)(2)(-1) = 3 > 0$$

$$\boxed{H=+3 > 0}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin\frac{3}{2}\pi - \cos 3\pi = -(-1) - (-1) = +2 > 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0} \quad \underline{\text{minimo}}$$

$$Z = \sin\frac{3}{2}\pi + \cos 3\pi + \sin\frac{3}{2}\pi = -1 - 1 - 1 = \boxed{Z = -3}$$

$$5) \boxed{x=\frac{\pi}{2}; y=\frac{3}{2}\pi}; H = \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3}{2}\pi + (\cos 2\pi)(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3}{2}\pi) = (1)(-1) + (1)(1-1) = -1 < 0$$

$$6) \boxed{x=\frac{3}{2}\pi; y=\frac{\pi}{2}} \text{ per simmetria col caso 5) } \boxed{H < 0}$$

In questi due casi non si hanno ne' massimi ne' minimi.

$$\text{Per: } \boxed{x=y=0} \text{ si ha: } \boxed{H=0} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = +1; \frac{\partial f}{\partial y} = +1$$

(essendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ manca la condizione di max o min.)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1; Z = 0 + 1 + 0 = 1 \quad \boxed{Z=1}$$

$$\text{Per } \boxed{x=y=\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)} \text{ si ha } \boxed{H=0} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

(essendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ manca la condizione di max, min)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -0,42154 < 0; \boxed{Z = 1,264605497}$$

$$\text{Per: } x=\frac{\pi}{6} \text{ si ha: } Z = \frac{1}{2}(\sin y + \sqrt{3}\cos y + 1)$$

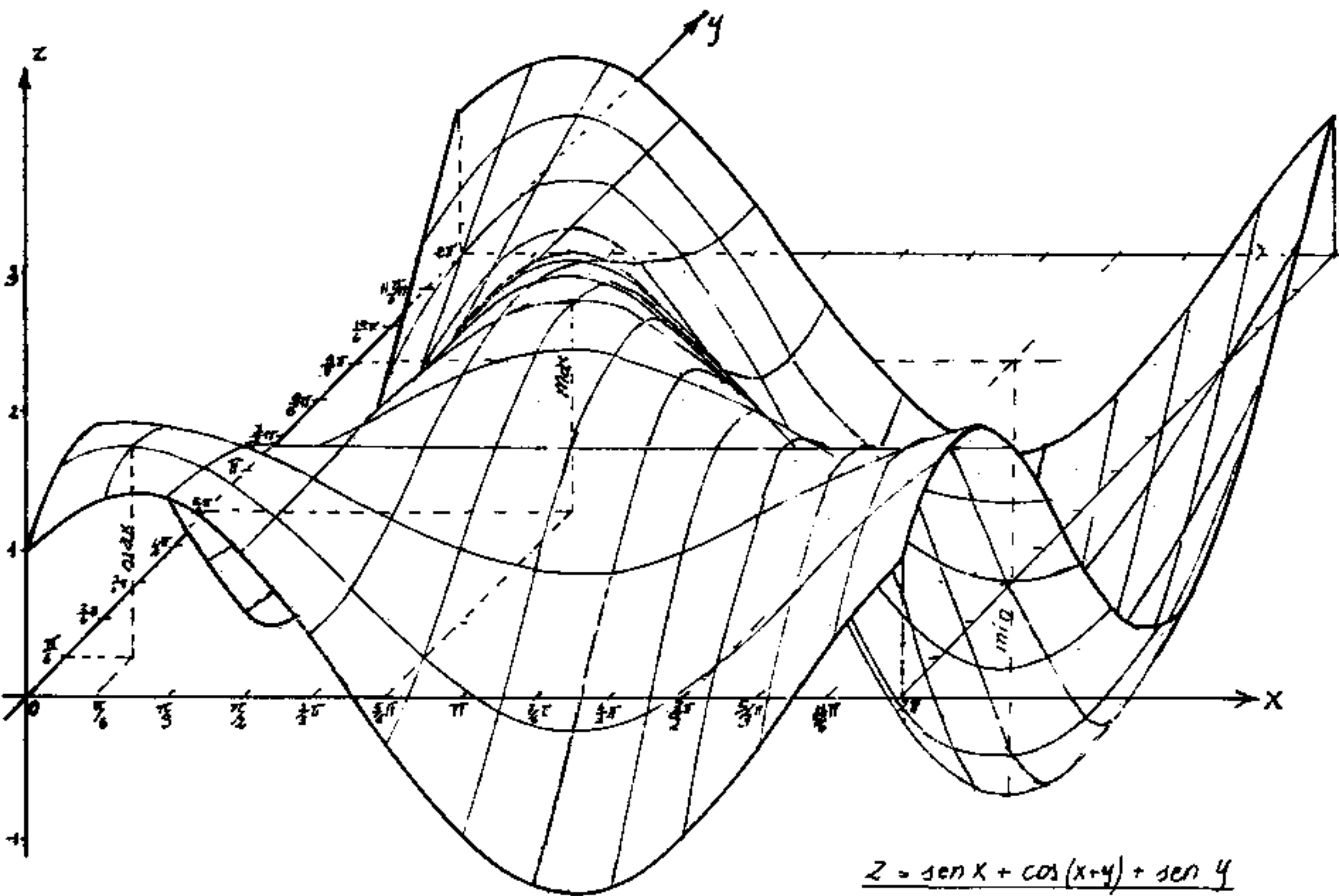
$$x=\frac{\pi}{4} \rightarrow Z = \frac{1}{2}((2-\sqrt{2})\sin y + \sqrt{2}\cos y + \sqrt{2})$$

$$x=\frac{\pi}{3} \rightarrow Z = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})\sin y + \sqrt{3}\cos y + \sqrt{3}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow Z = 1 \quad (\text{indipendente da } y)$$

$$x=\frac{5}{6}\pi \rightarrow Z = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\cos y - \sin y + 1)$$

$$x=\frac{3}{2}\pi \rightarrow Z = 2\sin y - 1$$



$$z = \sin x + \cos(x+y) + \sin y$$

(nel dominio: $0 \leq x \leq 2\pi$; $0 \leq y \leq 2\pi$.)

Altri esempi di massimi e minimi

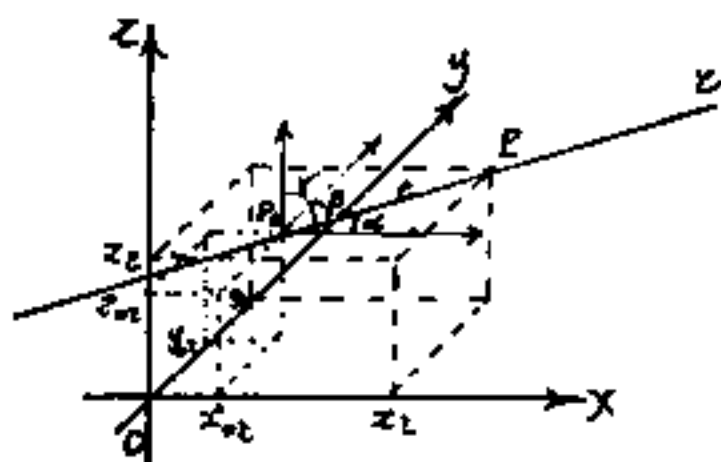
I problemi di massimo e di minimo, di funzioni in più variabili, possono presentarsi in molti casi.

Sappiamo, per esempio, che fra due rette sghembe esiste un segmento di minima distanza. (Cfr. cap. prec.)

Supponiamo che le equazioni di due rette: r , s , siano espresse in forma parametrica:

$$\text{retta } r \begin{cases} x_r = x_{0r} + a_1 t \\ y_r = y_{0r} + a_2 t \\ z_r = z_{0r} + a_3 t \end{cases}$$

$$\text{retta } s \begin{cases} x_s = x_{0s} + b_1 u \\ y_s = y_{0s} + b_2 u \\ z_s = z_{0s} + b_3 u \end{cases}$$



Sia P il punto corrente su r e $P_0 \equiv (x_{0r}, y_{0r}, z_{0r})$ un punto noto di r ; sia $t = \overline{P_0 P}$, avremo che a_1, a_2, a_3 sono i coseni direttori della retta r .

Analogamente sia Q il punto corrente su s e $Q_0 \equiv (x_{0s}, y_{0s}, z_{0s})$ un punto noto di s ; sia $u = \overline{Q_0 Q}$, avremo che b_1, b_2, b_3 sono i coseni direttori della retta s . Nelle variabili t ed u , dovremo minimizzare la distanza: $\delta = \overline{PQ} = \min.$ cioè:

$$\delta^2 = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2$$

Dalle equazioni parametriche, sottraendo membro a membro si ha:

$$\begin{cases} (x_e - x_s) = (x_{0e} - x_{0s}) + a_1 t - b_1 u \\ (y_e - y_s) = (y_{0e} - y_{0s}) + a_2 t - b_2 u \\ (z_e - z_s) = (z_{0e} - z_{0s}) + a_3 t - b_3 u \end{cases}$$

Deriviamo δ^2 rispetto a t e rispetto ad u , si ha:

$$\frac{\partial(\delta^2)}{\partial t} = 2 \left[(x_e - x_s) \frac{\partial(x_e - x_s)}{\partial t} + (y_e - y_s) \frac{\partial(y_e - y_s)}{\partial t} + (z_e - z_s) \frac{\partial(z_e - z_s)}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = 2 \left[(x_e - x_s) \frac{\partial(x_e - x_s)}{\partial u} + (y_e - y_s) \frac{\partial(y_e - y_s)}{\partial u} + (z_e - z_s) \frac{\partial(z_e - z_s)}{\partial u} \right]$$

sostituendo le derivate: $\frac{\partial(\dots)}{\partial t}$ e $\frac{\partial(\dots)}{\partial u}$ si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\delta^2)}{\partial t} = (x_e - x_s) a_1 + (y_e - y_s) a_2 + (z_e - z_s) a_3 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = (x_e - x_s) b_1 + (y_e - y_s) b_2 + (z_e - z_s) b_3 = 0$$

L'aver uguagliato a zero le derivate rispetto a t e rispetto ad u della δ^2 , è condizione necessaria, non sufficiente affinché $\delta = \overline{QP}$ presenti un minimo od un massimo.

Sostituiamo in tali espressioni i valori

di: $(x_c - x_s)$; $(y_c - y_s)$; $(z_c - z_s)$; avremo:

$$\begin{cases} [(x_c - x_s) + a_1 t - b_1 u] a_1 + [(y_c - y_s) + a_2 t - b_2 u] a_2 + [(z_c - z_s) + a_3 t - b_3 u] a_3 = 0 \\ [(x_c - x_s) + a_1 t - b_1 u] b_1 + [(y_c - y_s) + a_2 t - b_2 u] b_2 + [(z_c - z_s) + a_3 t - b_3 u] b_3 = 0 \end{cases}$$

sviluppando i prodotti e ricordando che:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 1 \quad ; \quad (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = 1 \quad \text{e che:}$$

$$\boxed{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \cos \theta} = (\text{angolo fra le direzioni } c \text{ ed } s)$$

otteniamo:

$$\begin{cases} (x_{oc} - x_{os}) a_1 + (y_{oc} - y_{os}) a_2 + (z_{oc} - z_{os}) a_3 + t - u \cos \theta = 0 \\ (x_{oc} - x_{os}) b_1 + (y_{oc} - y_{os}) b_2 + (z_{oc} - z_{os}) b_3 + t \cos \theta - u = 0 \end{cases}$$

Questo sistema di due equazioni nelle due incognite:

t ed u , ha il determinante dei coefficienti $\neq 0$

infatti $\begin{vmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta - 1 \end{vmatrix} = -1 + \cos^2 \theta = -\sin^2 \theta \neq 0$ per $\theta \neq 0$.

perciò il sistema ammette soluzioni per $\theta \neq 0$.

Sostituendo la colonna dei termini noti si hanno

le soluzioni:

$$u = \frac{-1}{\sin^2 \theta} [(x_{oc} - x_{os})(a_1 \cos \theta - b_1) + (y_{oc} - y_{os})(a_2 \cos \theta - b_2) + (z_{oc} - z_{os})(a_3 \cos \theta - b_3)]$$

$$t = \frac{1}{\sin^2 \theta} [(x_{oc} - x_{os})(b_1 \cos \theta - a_1) + (y_{oc} - y_{os})(b_2 \cos \theta - a_2) + (z_{oc} - z_{os})(b_3 \cos \theta - a_3)]$$

Verifichiamo con l'Hessiano che i valori di t ed u ottenuti uguagliando a zero le derivate parziali prime ammettono max o min.

Eseguiamo quindi le derivate seconde:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial t^2} = 1 ; \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u^2} = 1 ; \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u \partial t} = -\cos \theta$$

per cui l'Hessiano:

$$\begin{vmatrix} +2 & -2\cos\theta \\ -2\cos\theta & +2 \end{vmatrix} = H = 4(1 - \cos^2\theta) = 4\sin^2\theta > 0$$

Cioè l'espressione in t ed u ammette un minimo ed è un minimo assoluto poiché: $\lim_{t \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty} (\delta^2) = \infty$
cioè ogni segmento $\overline{PQ}$ con P su r e Q su s è maggiore di quello che verifica: $\frac{\partial(\delta^2)}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = 0$.

Se consideriamo che a_1, a_2, a_3 oltreché coseni direttori della retta r sono coseni direttori della giacitura di piani normali ad r compreso il piano passante per $\overline{PQ} = \delta$ (essendo $\overline{PQ} \perp r$)
e analogamente b_1, b_2, b_3 sono anche coseni direttori della giacitura di piani normali ad s compreso il piano passante per $\overline{PQ} = \delta$ (essendo $\overline{PQ} \perp s$).
cioè il segmento δ è perpendicolare ad entrambe le rette r ed s

- Sia n la retta comune ai due piani passanti

per $PQ = r$; l'angolo θ dei due piani è anche l'angolo delle direzioni a e b cioè delle direzioni di z e di s .

Essendo: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1 = K_1$
e $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = 1 = K_2$

cioè avremo:

$$\sin(\theta) = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|^2}$$

I coseni direttori della retta n comune ai due piani, sono facilmente ricavabili dal determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 = \cos(\hat{x}n) & x_2 = \cos(\hat{y}n) & x_3 = \cos(\hat{z}n) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\cos(\hat{x}n) = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \cos(\hat{y}n) = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};$$

$$\cos(\hat{z}n) = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{abbiamo quindi:}$$

$$\sin(\theta) \cos(\hat{x}n) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \sin(\theta) \cos(\hat{y}n) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \quad \sin(\theta) \cos(\hat{z}n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

La retta "n" passante per $PQ = \delta$, contiene quindi il segmento di minima distanza.

Possiamo scrivere:

$$(x_2 - x_1) = \delta \cos(\hat{n}x) \quad \text{da cui} \quad (x_2 - x_1) \cos(\hat{x}n) = \delta \cos^2(\hat{x}n)$$

$$(y_2 - y_1) = \delta \cos(\hat{n}y) \quad " \quad (y_2 - y_1) \cos(\hat{y}n) = \delta \cos^2(\hat{y}n)$$

$$(z_2 - z_1) = \delta \cos(\hat{n}z) \quad " \quad (z_2 - z_1) \cos(\hat{z}n) = \delta \cos^2(\hat{z}n)$$

$\cos^2(\hat{x}n) + \cos^2(\hat{y}n) + \cos^2(\hat{z}n) = 1$ per cui sommando:

$$\delta = (x_2 - x_1) \cos(\hat{x}n) + (y_2 - y_1) \cos(\hat{y}n) + (z_2 - z_1) \cos(\hat{z}n)$$

Sostituendo i valori dei coseni direttori di "n" e moltiplicando per $\sin \theta$ si ha:

$$\delta \sin \theta = (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (y_2 - y_1) \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + (z_2 - z_1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

espressione che può scriversi:

$$\delta \sin \theta = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Se togliamo alla prima riga la seconda moltiplicata per t ed aggiungiamo la terza moltiplicata per u il valore del determinante non cambia; perciò:

$$\delta \sin \theta = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bigg/ \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

I massimi ed i minimi assoluti in un dominio

Abbiamo già definito cosa si intende per dominio di una $f(x,y)$; occorre però fissare meglio le idee.

Consideriamo il dominio delimitato dal piano zy , è chiaro che tale piano può essere definito dalla: $x=0$ e la sua proiezione sul piano xy coincide con la sua traccia (che è l'asse y , nel piano xy). L'asse y , (nel piano) è appunto rappresentato da $x=0$,

Se l'altro piano che delimita il dominio, è il piano zx , avremo, analogamente, la sua definizione: $y=0$

Infine se il terzo piano che delimita il dominio è definito da: $y = -x + 1$, avremo che la retta: $y = -x + 1$ del piano xy rappresenta la intersezione di tale piano con il piano xy (la sua traccia su xy), e su tale retta (traccia), si proiettano tutti i punti del piano.

Questi tre piani: $x=0$; $y=0$; $y = -x + 1$, è bene osservarli meglio:

nella loro formula non figura mai la z , cioè; vuol dire che qualsiasi valore attribuito a z , non muta la loro formula, cioè per ogni $z = N$, (con N un numero qualsiasi positivo o negativo, compreso lo zero), la formula resta immutata.

Ma, $z=N$, rappresenta un piano parallelo ad xy e distante da esso la quantità N ; questo piano taglierà i tre piani che delimitano questo dominio, con figure identiche a quella delle tracce sul piano xy . (che poi, xy può definirsi $z=0$, cioè uno degli infiniti piani $z=N$)

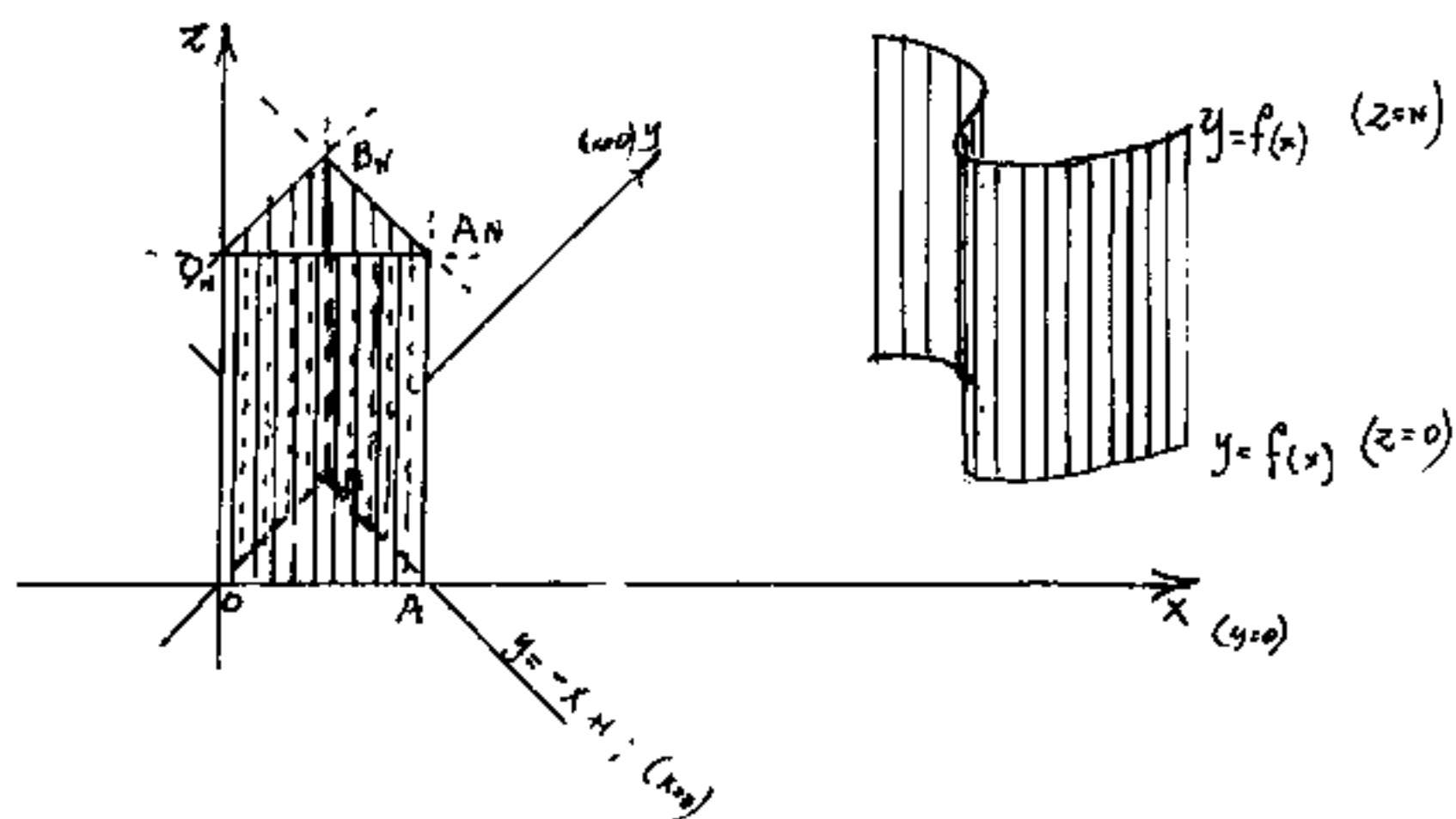
C'è ancora una osservazione:

espressioni del tipo: $x=0$, $y=0$; $x=n$, $y=m$; $y=mx+q$ - $y=f(x)$; mentre in geometria piana rappresentano rette o curve piane, giacenti su xy ; le stesse espressioni, nello spazio tridimensionale, in quanto non figura la z , rappresentano superfici parallele alla z stessa !!!!, cioè, superfici cilindriche.

Quest'ultima osservazione, mentre ci fa vedere la geometria piana come un caso particolare della geometria tridimensionale in cui si sia posto $z=0$; ci fa vedere anche tali superfici (cilindriche) come costituite da tante ordinate z , che escono, (verso l'alto, o verso il basso) dalle linee definite sul piano xy (cioè tracce, $y=f(x)$ rettilinee o curvilinee).

Vediamo come i tre piani $x=0$, $y=0$, $y=-x+1$,

delimitano un prisma di altezza indefinita, ma avente come base su xy , il triangolo rettangolo isoscele AOB , ove: $\overline{OA}$ è il segmento di $y=0$, $\overline{OB}$ il segmento di $x=0$, mentre l'ipotenusa $\overline{AB}$ è il seg-



mento di $y = (-x + 1)$; ($x=0$)

Questo involucro prismatico, delimita su $z=f(x,y)$ (dominio in x,y), la parte della $z=f(x,y)$ che è oggetto del nostro studio.

La superficie z chiuderà il prisma con una superficie piana o curva, a semplice o doppia curvatura. Sulle superfici delimitanti il dominio (i piani del prisma nel nostro caso) la $z=f(x,y)$ si intersecherà dando luogo a linee che sono il bordo del campo della $f(x,y)$ stessa.

se il dominio sul piano xy è un cerchio,

la retta parallela a z , che ne percorre la circonferenza, è la generatrice del cilindro circolare retto: $(x^2 + y^2 = R^2)$; analogamente altre $y = f(x)$, daranno luogo a cilindri o prismi o misti.

Consideriamo una $z = f(x, y) = \sin x + \cos y$, ed il dominio sia $x=0$; $y=0$; $y=-x+1$; (cioè il nostro prismetto). Il piano $y=-x+1$ incontra il piano xz secondo la retta: $x=1$; $y=0$, ed incontra il piano yz secondo la retta: $y=1$; $x=0$; queste rette e l'asse z sono gli spigoli del nostro prismetto a base triangolare. La $z = \sin x + \cos y$, interseca il piano yz ; ($x=0$) secondo la linea $z = \cos(y)$; interseca il piano xz ; $y=0$, secondo la linea: $z = \sin x + 1$.

$$\text{per: } x=0 ; y=0 \rightarrow z=1 \quad (\text{punto } O)$$

$$x=1 ; y=0 \rightarrow z = \sin(1) + 1 = 1,84147 \quad (\text{punto } A)$$

$$x=0 ; y=1 \rightarrow z = \cos(1) = 0,54030 \quad (\text{punto } B)$$

Ma qual'è la linea di intersezione fra la superficie: $z = \sin(x) + \cos(y)$ ed il piano: $y = (-x+1)$?
se sostituiamo y in z si ha:

$$z = \sin(x) + \cos(1-x) = \sin x + \cos(1)\cos(x) + \sin(1)\sin(x)$$

$$z = (1,84147)\sin(x) + (0,54030)\cos(x)$$

questa equazione è la proiezione su un piano parallelo a xz della linea intersezione giacente sul piano $y = -x+1$.

quindi i suoi max e min in direzione Z non mutano nella proiezione. Per ottenere la stessa configurazione basta prendere le asisse moltiplicate per $\sqrt{2}$.

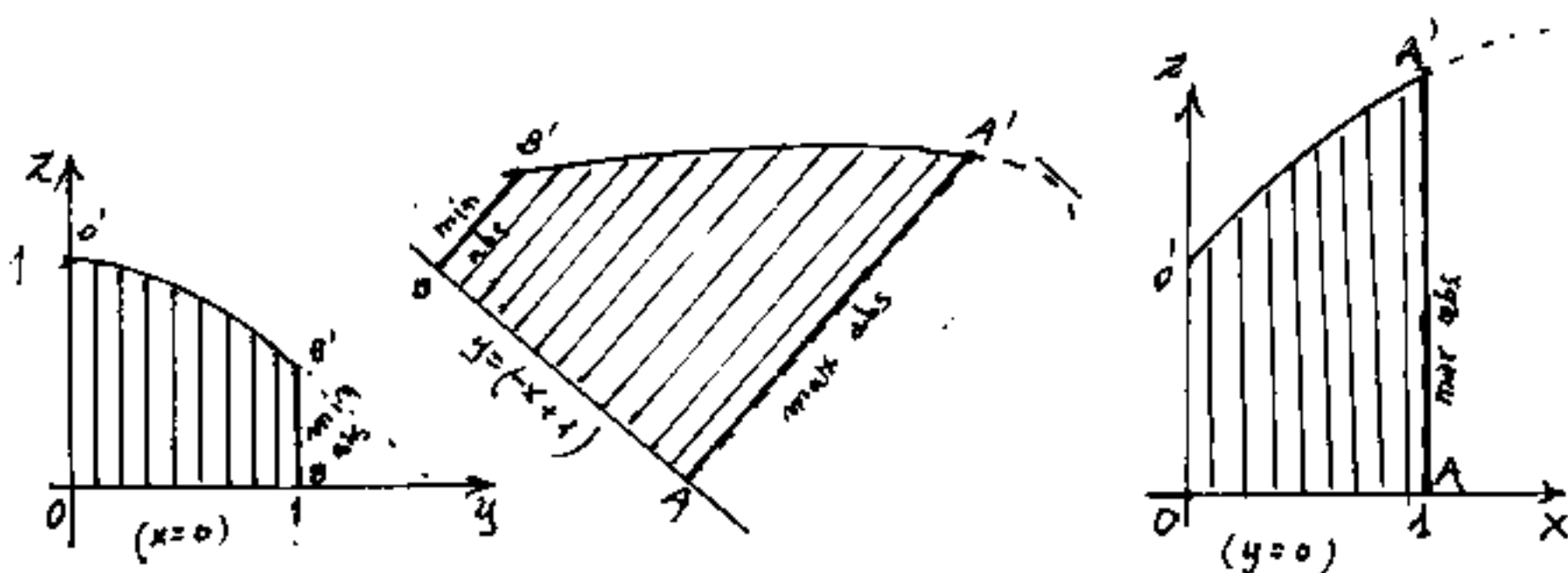
$$\frac{dz}{d\underline{x}} = (1 + \sin(1)) \cos(\underline{x}) - \cos(1) \sin(\underline{x}) = 0$$

$$\tan(\underline{x}) = \frac{1 + \sin(1)}{\cos(1)} = \frac{1,84147}{0,54030} = 3,40822$$

$$\underline{x} = \arctg(3,40822) = 1,28540 \text{ rad.} > 1$$

I max e min di tale funzione sono fuori del nostro dominio: $(0 \leq \underline{x} \leq 1)$.

Il punto $\underline{x} = 1,28540$ corrisponde $y = -0,28540$ ed ha un max in $z = 1,24109$ (massimo relativo sul prolungamento della linea su $\overline{BA}$). I massimi ed i minimi relativi



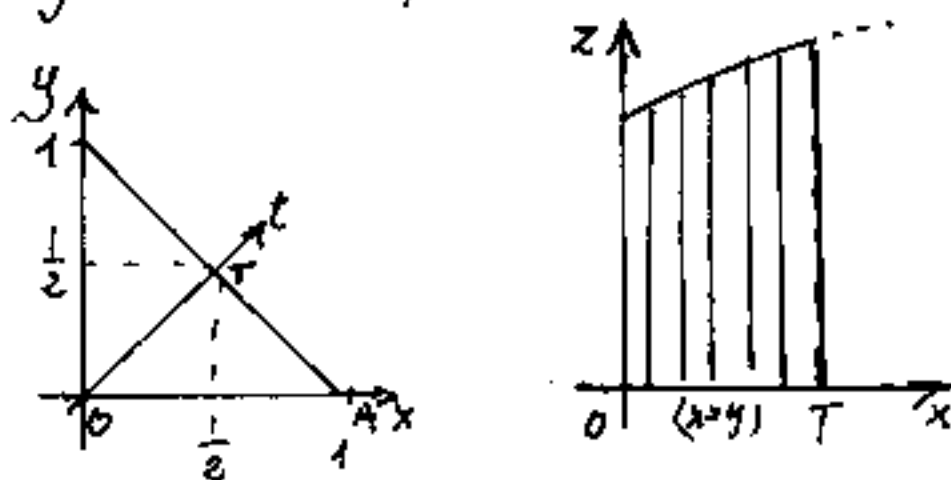
vi della superficie z si verificano fuori del dominio:

$$\max = 2 \text{ per } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; y = 0 + 2k\pi;$$

$$\min = -2 \text{ per } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; y = \pi + 2k\pi;$$

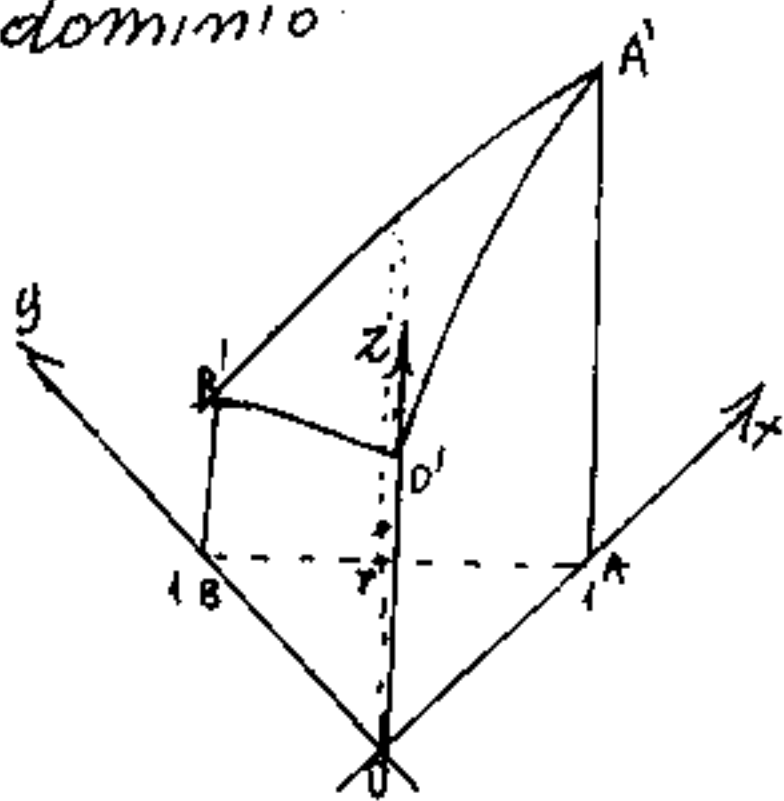
Se tagliamo con un piano $\overline{OT}$; $(y = x = \frac{1}{\sqrt{2}})$

abbiamo le sezioni:



Questo studio ci ha permesso di trovare che, nel dominio della funzione, non vi sono max o min relativi, che "sul bordo del dominio" si ha il max assoluto nel punto: $x=1$; $y=0$; $z=1,84147$; sempre sul bordo del dominio, si ha il min assoluto, nel punto: $x=0$; $y=1$; $z=0,54030$.

Se pensiamo di unire, ritagliandole, le tre figure sui piani $x=0$; $y=0$; $y=-x+1$; combaceranno i tre spigoli del prisma e cioè l'asse z , ed i segmenti: $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$; avremo così il bordo della superficie nel dominio.



se ne riporta, a fianco, una visione assonometrica, dalla quale è possibile rendersi conto dell'andamento della superficie nel dominio considerato; cioè che internamente al

dominio non vi sono né max, né min. Del resto

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-\tan y) ; \frac{\partial z}{\partial x} = (\cos x) ; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-\cos y) ; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-\sin x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 ; \quad H = \begin{vmatrix} -\tan x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{vmatrix} = +\tan x \cos y = H$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow y=0 ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{si ha} \quad 1 \cdot 1 = H > 0 ; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \quad (\text{max})$$

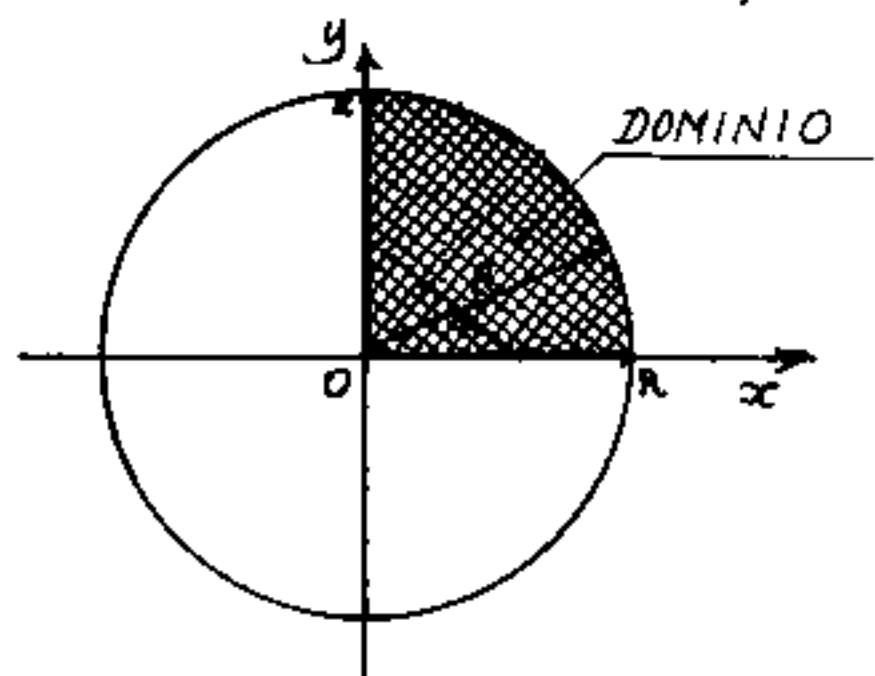
$$\quad \quad \quad \searrow y=\pi \quad \quad \quad \searrow x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{si ha} \quad (-1)(-1) = H > 0 ; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0 \quad (\text{min}).$$

Il calcolo dei volumi e gli integrali doppi di campo

Consideriamo un dominio definito da:

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq R^2$$

Nel piano xy , la $x \geq 0$ ci dice che dobbiamo considerare come appartenenti al dominio i soli punti che hanno ascissa positiva o nulla, cioè una funzione:



ne: $z = f(x, y)$ resta limitata a sinistra dal piano: yz ($x=0$).

Analogamente $y \geq 0$, limita col piano zx la funzione

$z = f(x, y)$ in basso, cioè: $x \geq 0$ ed $y \geq 0$ limitano la funzione al I quadrante. La $x^2 + y^2 \leq R^2$, limita la funzione ai punti interni al cerchio di raggio R , cioè il nostro dominio è il primo quadrante di tale cerchio (vedi figura)

Consideriamo ora una $f(x, y)$ (che porremo: $z = f(x, y)$) essa rappresenta una superficie che può estendersi indefinitamente di cui però, a noi, interessa la sola porzione che si proietta sul dominio.

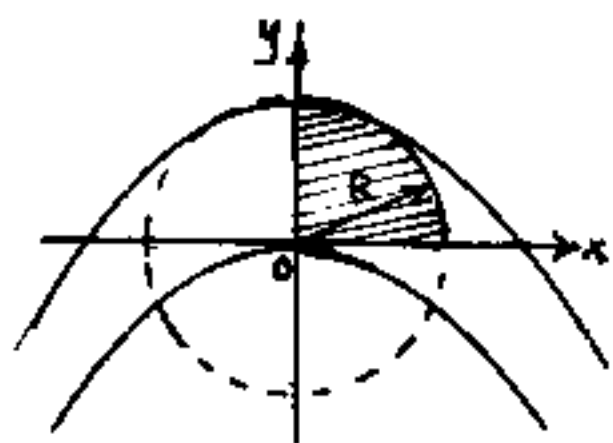
È bene avvertire subito che possono verificarsi vari casi:

- 1) Il dominio è tutto coperto dalla superficie $z = f(x, y)$ che si estende oltre il dominio
- 2) La proiezione su xy della intera superficie $z = f(x, y)$ è identica al dominio
- 3) La proiezione su xy della intera superficie $z = f(x, y)$ è tutta interna al dominio e quest'ultimo è maggiore. (In questo caso è evidente che il dominio della $z = f(x, y)$ è la sua proiezione, ed i punti esterni ad essa, anche se appartenenti ad un prefissato dominio non possono considerarsi dominio di punti REALI della z .)
- 4) Infine la $f(x, y)$ pur estendendosi, con la sua proiezione oltre il dominio, copre quest'ultimo solo in parte. In questo caso occorre definire una $f(x, y) = 0$ che, intersecando le linee del prefissato dominio, delimiti la parte di esso appartenente a punti reali di z .

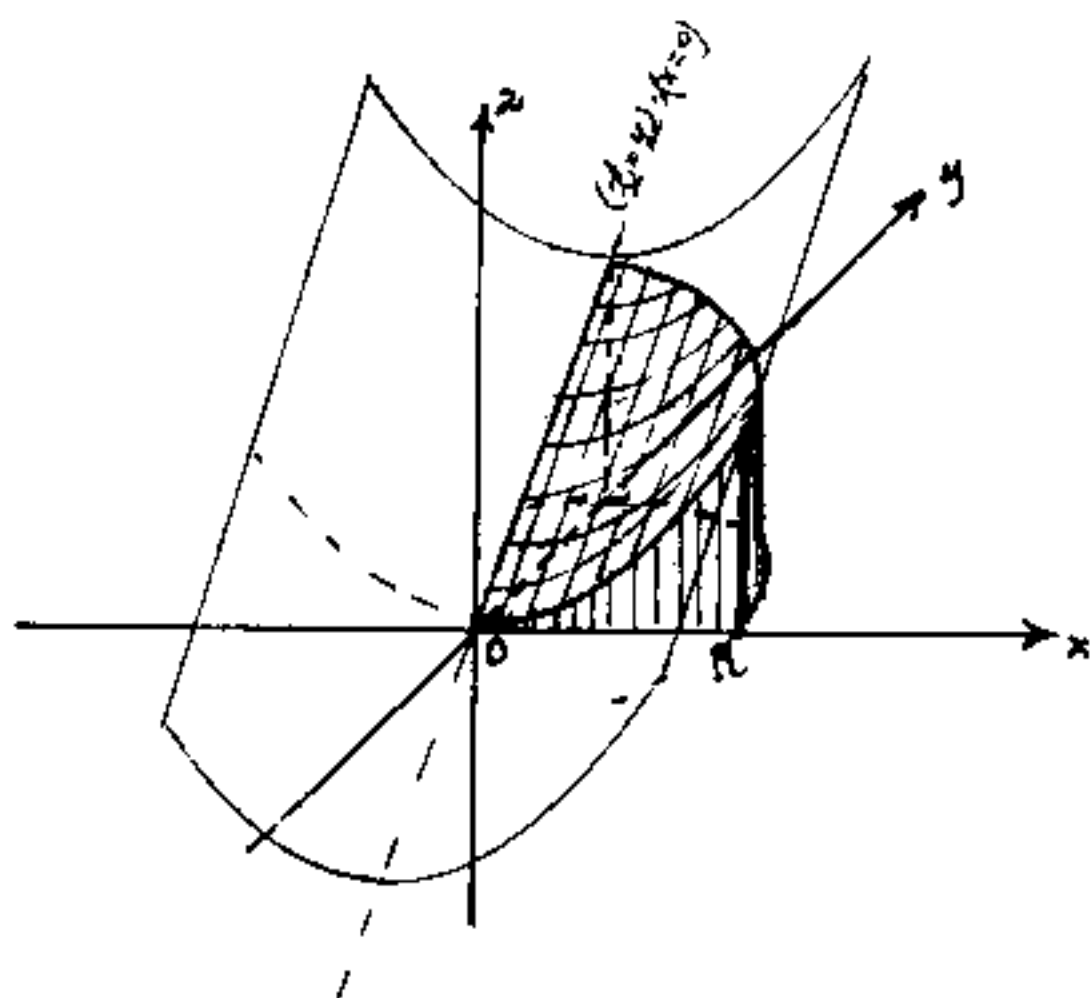
Supponiamo che la nostra: $z = f(x, y)$ sia:

$$z = x^2 + y$$

(Copre tutto il dominio?), Vediamo per $z = 0$, si ha: $y = -x^2$, cioè una parabola verso il basso. Per $z = R$, in dipendenza del valore di R può coprire tutto il dominio, o



solo parte di esso; tuttavia al crescere di z la superficie finisce per coprire tutto il dominio.



Per: $x=0$ si ha: $(z=y)$ cioè una retta a 45° sul piano yz .

Per: $x=\kappa \rightarrow (z=y+\kappa^2)$ cioè ancora una retta parallela

Cioè la nostra è una superficie rigata, cioè può essere generata da una retta inclinata di 45° rispetto all'orizzontale diretta secondo y , che si sposta mantenendosi parallela a se stessa e descrivendo una parabola con le intersezioni sui piani paralleli a zx . Infatti per $y=0 \rightarrow z=x^2$ e per $y=\kappa \rightarrow z=x^2+\kappa$. La superficie può anche considerarsi generata da una parabola verticale che si sposta parallelamente a se stessa mantenendo il vertice sulla retta $x=0; z=y$.

Le superfici generate da una retta che trasla lungo una curva mantenendosi parallela a se stessa, sono dette: "superfici ad una curvatura" e possono facilmente realizzarsi piegando un foglio di carta. Sono invece dette: "superfici a doppia curvatura" le superfici generate da linee curve che traslano lungo una curva, o ruotano intorno ad un asse. Per esempio la sfera, il paraboloide di rotazione, l'ellissoide, ecc. Queste non possono realizzarsi semplicemente piegando un pezzo di carta, perché dovremmo piegare la carta secondo due direzioni ortogonali. La distinzione di superfici ad una o a doppia curvatura, presenta notevole interesse in scienza delle costruzioni, infatti dopo aver: "inflesso" un foglio di carta (generando una superficie ad una curvatura), non è più possibile infletterlo secondo assi ortogonali, poiché, come vedremo, nelle sezioni ortogonali, (dopo la prima inflessione) è variato il momento d'inerzia. Le falde di una cupola a padiglione sono superfici ad una curvatura (come la Cupola del Duomo di Firenze); le cupole di rotazione sono superfici a doppia curvatura (una è la curva generatrice, l'altra la circonferenza).

Tornando alla nostra superficie (ad una curvatura) $z = x^2 + y^2$ se sezioniamo ad $x = \text{cost}$ otteniamo rette di intersezione; se sezioniamo ad $y = \text{cost}$ otteniamo parabole volte verso l'alto; se sezioniamo a $z = \text{cost}$ otteniamo parabole orizzontali volte in verso opposto alla y .

(La nostra superficie è un cilindro parabolico simmetrico al piano $x=0$ ed inclinato di $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ sul piano: $z=0$)

Vogliamo ora calcolare il volume del solido delimitato dai piani: $z=0$; $x=0$; $y=0$ (triedro positivo);

dal cilindro: $x^2 + y^2 = R^2$; e dalla superficie: $z = x^2 + y^2$.
(Cioè il volume fra il piano xy e la superficie delimitato dal dominio)

Il metodo è generale e può essere applicato a qualsiasi: $z = f(x, y)$ con qualsiasi dominio delimitato da: $y = \varphi(x)$ qualsiasi.

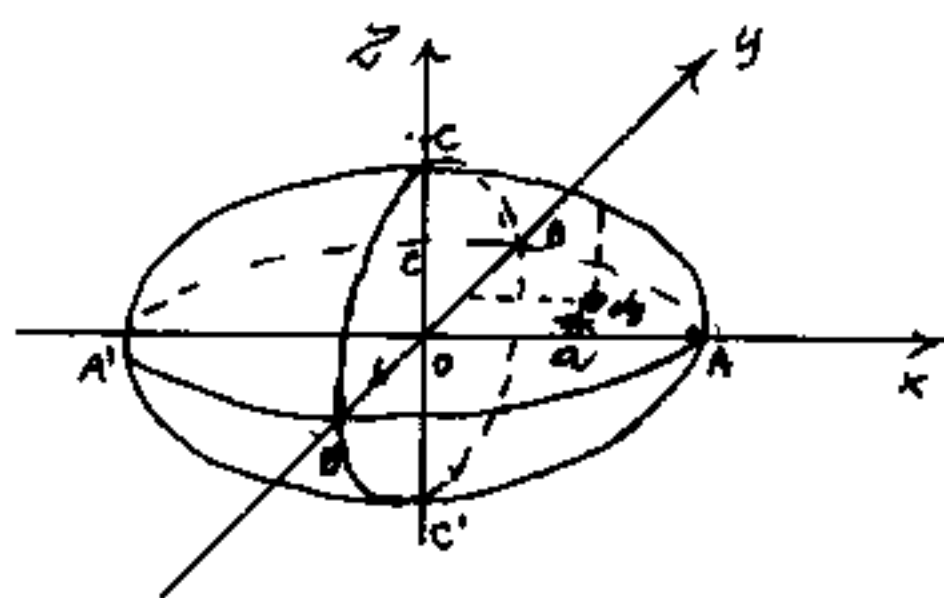
Nel calcolo dei volumi l'impostazione generale implica che, per ogni punto appartenente al volume, si possa considerare un cubetto infinitesimo di spigoli dx , dy , dz , il cui volume infinitesimo: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ e V può determinarsi come somma degli infiniti cubetti infinitesimi

$$V = \iiint dx \cdot dy \cdot dz$$

Occorre un integrale triplo perché vi sono tre differenziali.

Naturalmente per calcolare "V" occorre che "V" sia univocamente definito (come già specificato nel nostro caso). Il minimo di definizione di V è una unica superficie chiusa per esempio la sfera:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; o l'ellissoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, in questo caso il giuoco di tagliare a fettine, ci fa vedere la $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, cioè sezionando a $z = \text{cost}$ si hanno ellissi, ma, data la simmetria, anche a $y = \text{cost}$ o $x = \text{cost}$ si hanno ellissi.



Consideriamo il dominio delimitato da $x=0$; $y=0$; $z=0$ e $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, Il volume di questo solido è $\frac{1}{8}$ del volume

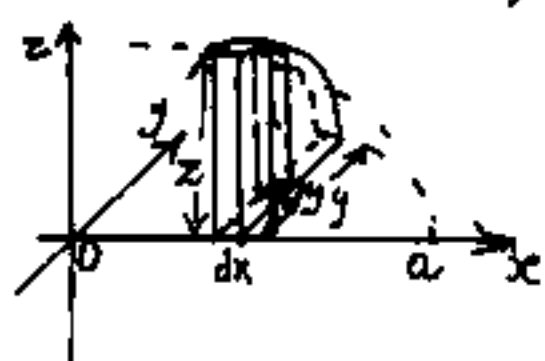
dell'ellissoide; supponendo di "materializzare una ordinata z in un prismetto di base dx ,



dy ed altezza $z = f(x, y)$, avremo che il volume elementare del prismetto sarà: $dv = z \cdot dx \cdot dy$.

Si hanno tre variabili occorre sceglierne una assolutamente indipendente, (noi scegliamo la x) scelta la x essa può variare (nel dominio) da "0" ad "a"; ma attribuito

un qualsiasi valore alla x , la y non è più arbitraria, ma è legata ai limiti del dominio su xy , perciò essendoci per $z=0$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avremo che la $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, per ogni valore di x compreso fra 0 ed a , perciò noi consideriamo di aver tagliato il solido con piani ad $x = \text{cost}$ e "fettine" di spessore dx , il cui volume



sarà l'area della "fettina" moltiplicata per dx .

Ma l'area della fettina sarà data dalla somma delle ordinate z per dy con y variabile da "0" a: " $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ".

Con ciò abbiamo scelto una sequenza nell'ordine di indipendenza delle variabili x, y, z
 $x = \text{indipendente}$; $y = f(x)$; $z = f(x, y)$.

È bene avvertire che la sequenza è arbitraria e normalmente si sceglie quella che riteniamo semplifichi (caso per caso) i calcoli.

Avremo quindi:

$$V = 8 \int_0^a \left[\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dy \right] dx$$

è questo un integrale doppio di campo.

Per risolvere questo tipo di integrali, occorre considerare inizialmente come una costante, la variabile da noi scelta come indipendente ed integrare nell'altra variabile nei limiti in funzione della variabile indipendente (per noi la x) quindi eseguire la seconda integrazione.

$$V = 8C \int_0^a \left[\int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{a^2 y^2}{(a^2-x^2)b^2}\right)} dy \right] dx$$

$$V = 8C \int_0^a \left(b \frac{(a^2-x^2)}{a^2} \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{a y}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2} d\left(\frac{a y}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right) \right) dx$$

ricordare l'integrale: $\int (\sqrt{1-f^2}) df$

$$\int_{f_1}^{f_2} \sqrt{1-f^2} df = \frac{1}{2} \left[f\sqrt{1-f^2} + \arcsin f \right]_{f_1}^{f_2} \quad \text{perciò:}$$

$$V = 8C \int_0^a \left(b \frac{a^2-x^2}{2a^2} \right) \left[\frac{a y}{b\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{a y}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{a y}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right) \right]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$V = 8C \int_0^a \left(b \frac{(a^2-x^2)}{2a^2} \right) \left(1\sqrt{1-1^2} + \arcsin(1) - 0 \right) dx$$

$$V = 8C \int_0^a b \frac{(a^2-x^2)}{2a^2} \cdot \frac{\pi}{2} dx$$

$$V = \frac{8\pi b C}{a^2} \int_0^a (a^2-x^2) dx = \frac{2\pi b C}{a^2} \left[\frac{a^3}{1} - \frac{a^3}{3} \right]$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi abc} \quad \text{volume dell'ellissoide}$$

Se $a=b=c=R$ si ha il volume della sfera.

Seguendo il procedimento ora spiegato possiamo calcolare:

$$V = \int_0^R \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y) dy \right) dx$$

$$V = \int_0^R \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_0^R \left(x^2 \sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2-x^2}{2} \right) dx$$

$$V = \left[-\frac{x}{4} (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{R^2}{8} \left(x \sqrt{R^2-x^2} + R^2 \arcsin \left| \frac{x}{R} \right| \right) + \frac{R^2}{2} x - \frac{x^3}{6} \right]_0^R$$

$$V = \left[\left(0 + \frac{R^2}{8} \left(0 + \frac{\pi R}{2} \right) + \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{6} \right) - (0) \right] = \boxed{R^3 \left(\frac{\pi R}{16} + \frac{1}{3} \right)}$$

Il calcolo dell'integrale: $\int x^2 \sqrt{R^2-x^2} dx$ ponendo: $\frac{x}{R} = \sin t$

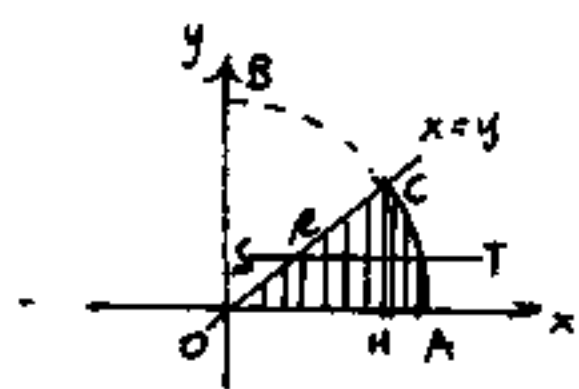
$$\text{diventa } = R \int \sin^2 t \cos t dt = \frac{R^4}{8} \int \sin^2(2t) d(2t) =$$

$$= \frac{R^4}{8} \frac{-(\sin 2t)(\cos 2t) + 2t}{2} = \frac{R^4}{8} (2 \sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + t)$$

da cui tornando in $t = \arcsin \frac{x}{R}$; $\cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$; ecc.

La scelta dei limiti di integrazione

Supponiamo che un dominio sia delimitato da: $x=y$; $y=0$; $x^2+y^2=R^2$, è simile al nostro dominio cambia solo: $x=y$ anziché $x=0$.
e la $f(x,y) = z = x^2+y$ sia la stessa.



Si nota che se tagliamo ad $x=\text{cost}$, com'è il tratteggio in figura, per x variabile da 0 ad H i limiti in y sono $y=0$

ed $y=x$, mentre per x da H ad A i limiti in y sono $y=0$ ed $y=\sqrt{R^2-x^2}$; ciò implica di dover dividere in due intervalli (e quindi due integrali)

Se invece sezioniamo ad $y=\text{cost}$, (come in figura con la retta ST si ha che la variabile indipendente scelta è la y che varierà da $y=0$ ad $y=HC = \frac{R}{\sqrt{2}}$, mentre la x avrà i limiti variabili: $x=y$; $x=\sqrt{R^2-y^2}$; ed il volume di questo dominio sarà:

$$V_1 = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x=y}^{\sqrt{R^2-y^2}} (x^2+y) dx \right) dy$$

ed occorrerà integrare prima in x ad $y=\text{cost}$, e sostituirvi i limiti in $f(y)$, poi integrare in y .

Integrando in x otteniamo:

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=y}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} dy$$

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left[\left(\frac{R^2-y^2}{3} \right)^{3/2} + y\sqrt{R^2-y^2} \right] - \left(\frac{y^3}{3} + y^2 \right) dy$$

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(\frac{R^3}{3} \left(1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right)^{3/2} \right) dy + \left[-\frac{y^4}{12} - \left[\frac{y^3}{3} \right] - \frac{1}{2} \int \sqrt{R^2-y^2} d(R^2-y^2) \right]_0^{R/\sqrt{2}}$$

posto $\frac{y}{R} = \sin t$

$$V_1 = \frac{R^4}{3} \int_0^{\arcsin(1/\sqrt{2})} \cos^3 t dt + \left[-\frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (R^2-y^2)^{3/2} \right]_0^{R/\sqrt{2}} \right]$$

$$V_1 = \frac{R^4}{3} \left[\frac{3}{8} t + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32} \right]_0^{\arcsin(1/\sqrt{2})} - \frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3} \left[\left(R^2 - \frac{R^2}{2} \right)^{3/2} - (R^2-0)^{3/2} \right]$$

$$V_1 = \frac{R^4}{3} \left[\frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4} + \frac{0}{32} \right] - \frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3} \left(R^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \right)$$

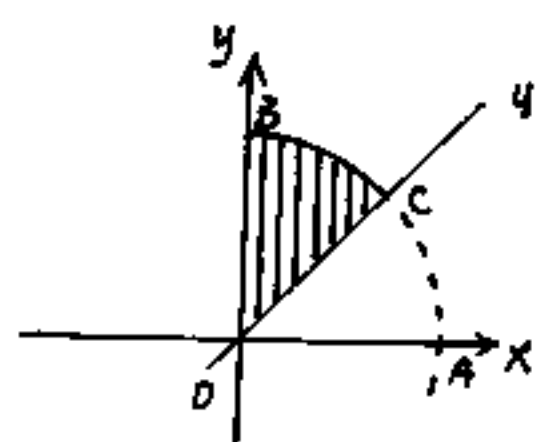
$$V_1 = \frac{R^4\pi}{32} + \frac{R^4}{12} - \frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} + \frac{R^3}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \right)$$

$$V_1 = \frac{R^4\pi}{32} + \frac{R^4}{16} - \frac{R^3\sqrt{2}}{6} + \frac{R^3}{3}$$

Per differenza l'altra parte di dominio dovrà

essere: $V - V_1 = V_2 = \frac{R^4}{32} - \frac{R^4}{16} + \frac{R^3\sqrt{2}}{6}$

Se consideriamo l'altra parte di dominio è invece conveniente scegliere la x come indipendente ed avremo: $x=0$ ad $x=R/\sqrt{2}$; $y=x$; $y=\sqrt{R^2-x^2}$;



ferma restando la $z = x^2 + y$ si ha:

$$V_2 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(\int_x^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y) dy \right) dx$$

abbiamo già risolto con limiti diversi:

$$V_2 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(x^2 \sqrt{R^2-x^2} - x^3 + \left(\frac{R^2-x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx$$

$$V_2 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(x^2 \sqrt{R^2-x^2} - x^3 + \frac{R^2}{2} - x^2 \right) dx =$$

$$V_2 = \left[-\frac{x}{4} (R^2-x^2)^{3/2} + \frac{R^2}{8} (x \sqrt{R^2-x^2}) + \frac{R^4}{8} \arcsin \left| \frac{x}{R} \right| - \frac{x^4}{4} + \frac{R^2}{2} x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{R/\sqrt{2}}$$

$$V_2 = \left[\frac{-R\sqrt{2}}{8} \left(\frac{R^3}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{R^2}{8} \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{R^4 \pi}{8 \cdot 4} - \frac{R^4}{16} + \frac{R^3}{4} \sqrt{2} - \frac{R^3}{6\sqrt{2}} \right]$$

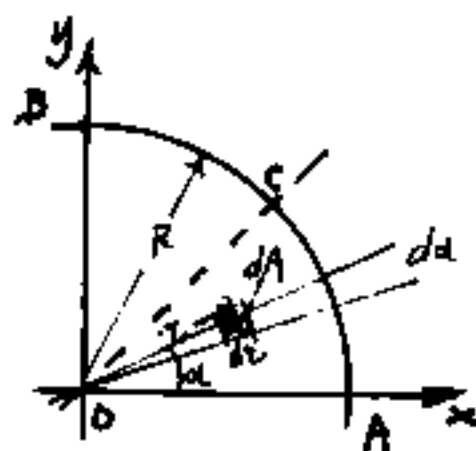
$$\boxed{V_2 = \frac{R^4 \pi}{32} - \frac{R^4}{16} + \frac{\sqrt{2}}{6} R^3} \quad (\text{torna come previsto})$$

Ci domandiamo se con altri algoritmi, il calcolo degli integrali doppi, possa essere semplificato. In questo caso sarebbe stato più semplice assumere come area elementare nel dominio quella espressa in coordinate polari,

Infatti:

$$z = z^2 \cos^2 \alpha + z \sin \alpha;$$

$$dA = z d\alpha dz; \quad dV = z dA$$



$$dV = (z^2 \cos^2 \alpha + z \sin \alpha) z d\alpha dz$$

$$V = \int_0^R \int_0^{\pi/2} (z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \sin \alpha) d\alpha dz$$

$$V = \frac{R^4}{4} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{2} \right)_0^{\pi/2} + \frac{R^3}{3} (-\cos \alpha)_0^{\pi/2}$$

$$V = \frac{R^4 \pi}{16} + \frac{R^3}{3}$$

(abbastanza più veloce).

$$V_1 = \frac{R^4}{4} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{2} \right)_0^{\pi/4} + \frac{R^3}{3} (-\cos \alpha)_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{R^4}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{R^3}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

$$V_1 = \frac{R^4 \pi}{32} + \frac{R^4}{16} + \frac{R^3}{6} (2 - \sqrt{2})$$

$$V_2 = \frac{R^4}{4} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{2} \right)_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{R^3}{3} (-\cos \alpha)_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$V_2 = \frac{R^4}{8} \left(0 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{R^3}{3} \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$V_2 = \frac{R^4 \pi}{32} - \frac{R^4}{16} + \frac{R^3 \sqrt{2}}{6}$$

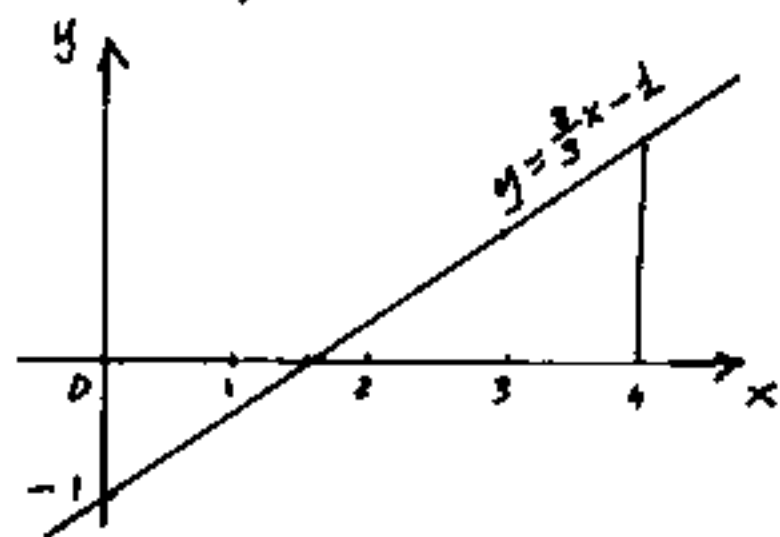
È facile verificare che: $V_1 + V_2 = V$.

Possiamo dire che, integrali che si risolvono per sostituzione trigonometrica, spesso è meglio in coordinate polari.

Avvertenze nel calcolo di volumi con integrali doppi di campo.

Tal volta può avvenire che ordinate negative rendano negativa un'area o un volume e quindi addizionarsi algebricamente da per risultato la differenza delle aree o dei volumi.

Per chiarire questo concetto facciamo un esempio semplice; se la richiesta è:



"Calcolare l'integrale"

$$I = \int_0^4 \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx = \left(\frac{x^2}{3} - x\right)_0^4$$

$$I = \frac{16}{3} - 4 = \boxed{I = \frac{4}{3}}$$

ma se la richiesta è:

"Calcolare l'area delimitata dalla retta

$y = \frac{2}{3}x - 1$, dall'asse x , dall'asse y e dall'ordinata

$x = 4$ " dobbiamo spezzare l'integrale cercando

$y = 0 = \frac{2}{3}x - 1 \rightarrow$ per $x = \frac{3}{2}$ ed avremo:

$$A = \left| \int_0^{3/2} \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx \right| + \left| \int_{3/2}^4 \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx \right|$$

$$A = \left| \left(\frac{3/2}{3}\right)^2 - 3/2 \right| + \left| \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{9}{4}\right)/3 + 3/2 \right| =$$

$$= \left| -\frac{3}{4} \right| + \left| \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \right| = \left| -\frac{3}{4} \right| + \left| \frac{25}{12} \right|$$

$$\boxed{A = \frac{17}{6}}$$

Consideriamo la domanda: (Cfr. L.S. Feldhofer
1000 esercizi di analisi matematica E.S. & Giorgio - Torino
1946) (pag 554))

"Calcolare $I = \int_T \int y \, dx \, dy$
per il dominio T limitato dalle due parabole:

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = x^2 + x$$

Notiamo subito che la $z = f(x, y) = y$, è
un piano passante per l'asse x bisettore del
diebro retto: $z \hat{O} y$. Questa osservazione interessa
il calcolo dei volumi.

Rispondiamo alla domanda.

I punti M, N comuni alle due parabole sono;
 $M \equiv (-1, 0)$; $N \equiv (2, 6)$;

Dal disegno è possibile dire che conviene
sezionare ad $x = \text{cost}$ (variabile indipendente)
ed avremo:



$$I = \int_{-1}^{+2} \left(\int_{(2x^2-2)}^{(x^2+x)} y \, dy \right) dx$$

$$I = \int_{-1}^{+2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{2x^2-2}^{x^2+x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+2} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x^2 + 8x^2 - 4) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+2} (-3x^2 + 2x^3 + 9x^2 - 4) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^2 - 4x \right]_{-1}^{+2} =$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{3}{3}32 + \frac{1}{2}16 + 3 \cdot 8 - 4 \cdot 2 \right) - \left(+\frac{3}{3} + \frac{1}{2} - 3 + 4 \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{24}{5} \right) - \left(\frac{21}{10} \right) \right] = \boxed{I = \frac{37}{20}}$$

Delimitiamo il dominio nei tre quadranti degli assi che attraversa; al fine di cercare il volume fra il piano xy ; ($z=0$); il piano: $z=y$ ed il bordo del dominio. Per il III quadrante possiamo ancora andare ad $x=\text{cost}$ ed avremo:

$$V_1 = \int_{-1}^0 \left(\int_{(2x^2-2)}^{(x^2+x)} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x \right]_{-1}^0 = \boxed{V_1 = -\left(\frac{31}{30}\right)}$$

anche per il IV quadrante tagliamo ad $x=\text{cost}$.

$$V_2 = \int_0^1 \left(\int_{2x^2-2}^0 y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (-4x^4 + 8x^3 - 4) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{4}{5}x^5 + 2x^3 - 4x \right]_0^1 = \boxed{V_2 = -\frac{16}{15}}$$

Per il I quadrante non possiamo avere tutto ad $x=\text{cost}$ però trasformare in $x=f(y)$ le parabole complicheremo i calcoli perciò spezziamo in due l'integrale:

$$V_3 = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2+x} y \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{2x^2-2}^{x^2+x} y \, dy \right) dx = \text{(notare i limiti)}$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^4 + 2x^3 + x^2] dx + \frac{1}{2} \int_1^2 [3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 4] dx =$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{4}x^4 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - 4x \right]_{+1}^{+2}$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{31}{30} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{24}{5} \right) - \left(-\frac{11}{10} \right) \right] = \left(\frac{31}{60} \right) + \left(\frac{59}{20} \right) = \boxed{V_3 = \frac{52}{15}}$$

Si verifica: $V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{31}{30} - \frac{16}{15} + \frac{52}{15} = \frac{87}{20} = V$

Funzioni implicite

Sia $f(x,y)$ una funzione nelle variabili x ed y , finita e continua in un campo C , e sia x_0 un valore della x , tale che, esista un unico valore della y in modo che si abbia $f(x_0, y) = 0$.

E' bene osservare che non tutti i valori della x sono tali da rendere possibile: $f(x, y) = 0$, (per esempio: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, i valori della x dovranno essere: $x \leq R$, poiché $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ sarebbe immaginario). Per rendere monodroma, (cioè ad un sol valore,) l'espressione: $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, possiamo scriverla per valori non negativi: $y = |\sqrt{R^2 - x^2}|$, e per valori non positivi: $y = -|\sqrt{R^2 - x^2}|$.

Se la molteplicità dei valori della y per ogni x_0 , dipende dal campo della x , limiteremo il campo della x ; se dipende dall'inversione di funzioni trigonometriche, considereremo solo i valori del I quadrante, eventualmente con segno, ed escludendo $+2K\pi$. (Salvo che il problema non determini univocamente il quadrante).

Questa introduzione vuole essere un chiarimento sulle "Condizioni" poste alla validità del teorema del Dini. cioè si è voluto far notare

che se una $f(x,y)=0$, non è possibile ridurla ad $y=f(x)$ (cioè non è possibile esplicitarla), occorre tener presente che vi possono essere campi o condizioni ove la funzione non esiste ed è ambigua.

Teorema del Dini sulle funzioni implicite

"Sia $f(x,y)$ una funzione di x ed y , finita e continua in un campo C , e supponiamo che per essa siano verificate le seguenti ipotesi:

- 1°) Le coordinate (x_0, y_0) , in un punto interno al campo C , annullino $f(x,y)$, cioè $f(x_0, y_0) = 0$.
- 2°) In un intorno di x_0, y_0 , ad esempio nel rettangolo R , di lati $2h, 2k$ con centro in (x_0, y_0) , la $f(x,y)$ abbia derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti x, y , finite e continue.
- 3°) In tutti i punti (x,y) del rettangolo R , cioè:
 $|x-x_0| \leq h; |y-y_0| \leq k$, si abbia: $f'_{(x,y)}(x,y) \neq 0$, cioè:
 $(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0)$.

In queste ipotesi si può determinare in un intorno I di x_0 una ed una sola funzione $y=f(x)$ di x , la quale, nell'intervallo I , soddisfa la limitazione: $y_{(x)} < k$ e identicamente l'equazione $f(x,y)=0$, cioè per

ogni valore x dell'intervallo I , si ha identicamente
 $f(x_0, y(x)) = 0$

La funzione $y(x)$ è derivabile in x_0 ed ivi
la sua derivata è data dalla formula:

$y'(x_0) =$	$-\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} =$	$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$
-------------	--	--

"

Esempi

Cerchiamo di capire!

Una funzione implicita $f(x, y) = 0$ è come dire:
 $z = f(x, y) = 0$, da cui: $dz = 0$. perciò:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

ed anche:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$$

cioè:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$
--

(cioè la derivata della funzione esplicita
è il rapporto delle derivate parziali della implicita
preso di segno opposto.)

Facciamo un esempio di funzione esplicitabile.

$$f(x,y) = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - R^2 = 0} \quad (\text{forma implicita})$$

$$\boxed{y = \sqrt{R^2 - x^2}} \quad (\text{forma esplicita})$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y ;$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-2x}{2y} = \boxed{\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}} \quad (\text{che verifica il teorema del Dini})$$

Facciamo un esempio di funzione esplicitabile solo in x , non esplicitabile in y

$$f(x,y) = 0$$

$$\boxed{y + \sin y - x = 0}$$

Per la derivazione delle funzioni inverse abbiamo:

$$x = y + \sin y ; \quad \frac{dx}{dy} = 1 + \cos y ; \quad \frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{1 + \cos y}}$$

applicando il teorema del Dini:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1 + \cos y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-(-1)}{1 + \cos y} = \frac{+1}{1 + \cos y} = y'$$

Come si vede occorrono coppie di valori x_0, y_0 tali che $f(x_0, y_0) = 0$ e che $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$: (condizioni 1) e 3) del Dini)

Esempio di funzione implicita non esplicitabile

$$y + \sin y - x + \log(x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + \frac{1}{x} = \left(\frac{-x+1}{x} \right); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1 + \cos y)$$

$$\left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dy}{dx} \right); \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)}{x(1+\cos y)}}$$

Facciamo una tabella delle coppie di valori x_0, y_0 che verificano l'equazione: $f(x, y_0) = 0$

Notiamo che: $(-x + \log(x)) < 0$ è sempre minore di zero, ed ammette due valori uguali per $x < 1$ ed $x > 1$, mentre per $x = 1$ ammette il massimo negativo (minimo) $= (-1)$.

Perciò affinché si verifichi l'equazione $f(x, y) = 0$, $(y + \sin y)$ dovrà essere maggiore o uguale ad 1

x_0	y_0	$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)}{x(1+\cos y)}$	Grafico della funzione: $(y + \sin y - x + \log x = 0)$
0,05	2,300081	-56,9436	
0,25	0,871195	-1,824914	
0,50	0,6156543	-0,55054	
0,70	0,5413670	-0,2307864	
1	0,510973	0	
1,5	0,561814	+0,180542	
2	0,678909	+0,281174	
2,5	0,83944	+0,359738	
3	1,03932	+0,442437	
4	1,614665	+0,78440	

Retta tangente ad una curva espressa in forma implicita ($f(x,y)=0$)

Sappiamo che la retta tangente ad una curva espressa in forma esplicita $y=f(x)$, se è noto il punto di tangenza $T \equiv (x_T, y_T)$, ha per equazione:

$$(y - y_T) = y'_T (x - x_T)$$

od anche:

$$y = y'_T (x) + (f(x_T) - y'_T \cdot x_T)$$

Per curve in forma implicita, per il teorema del Dini:

$$(y - y_T) = \left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) (x - x_T)$$

ed anche:

$$\frac{\partial f}{\partial x_T} (x - x_T) + \frac{\partial f}{\partial y_T} (y - y_T) = 0$$

(equazione della retta tangente in T alla curva $f(x,y)=0$)

Esempio: Le rette tangenti l'ellisse o l'iperbole aventi equazione: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, ove: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$; sostitui-

tuendo: $\frac{2x}{a^2} (x - x_T) \pm \frac{2y}{b^2} (y - y_T) = 0$; cioè: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{xx_T}{a^2} \pm \frac{yy_T}{b^2}$

ma: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, perciò:

$$\frac{xx_T}{a^2} \pm \frac{yy_T}{b^2} = 1$$

È l'equazione della retta tangente L'ellisse o l'iperbole nel punto $T \equiv (x_T, y_T)$ di tali curve.

Equazione del piano tangente alla superficie di equazione implicita: $f(x,y,z)=0$

(Coseni direttori della normale)

La simmetria della $f(x,y,z)=0$, ci mostra che noi potremmo prendere una qualsiasi delle tre variabili come dipendente. (cioè: $x=f(y,z)$; $y=f(x,z)$; $z=f(x,y)$)
Noi ci riferiamo a: $z_0 = f(x,y)$.

Supponiamo che in un intorno di $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ sia: $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, estendendo quanto già detto per il piano tangente alla $z = f(x,y)$, la cui formula era:

$$(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y - y_0)$$

Nel caso di equazione implicita avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} (z - z_0) = 0$$

equazione del piano tangente alla superficie nel punto: $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$.

Quindi i coseni direttori della normale alla superficie saranno rispettivamente: $\cos(n_x)$, $\cos(n_y)$, $\cos(n_z)$

$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$	$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$	$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$
---	---	---

(a segni concordi.)

Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni - Lo Jacobiano (determinante funzionale)

Se consideriamo l'intersezione fra due superfici espresse da: $f(x, y, z) = 0$ ed $\varphi(x, y, z) = 0$, e possiamo in esse esplicitare una stessa incognita, avremo:
 $z = f_i(x, y)$; $z = \varphi_i(x, y)$; uguagliando avremo:
 $f_i(x, y) - \varphi_i(x, y) = 0$ che può scriversi: $g(x, y) = 0$.
La "g" è una funzione, nella quale, se è possibile esplicitare la y avremo: $y = g(x)$ (che è la equazione della proiezione sul piano xy della curva intersezione).

Analogamente se possiamo esplicitare la x o la y avremo l'equazione della curva proiettata su yz o su xz.

Avendo due equazioni in tre variabili sono risolvibili solo due variabili in funzione della terza variabile.

Cio' premesso supponiamo di avere P equazioni in $(n+p)$ variabili, (indichiamo con x le prime n variabili e con y le restanti p variabili), avremo il

sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che esista un punto $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_p)$ che soddisfi, sostituendo le sue coordinate, tutte le equazioni del sistema.

Consideriamo un intorno di P_0 dimensionato da:

$$|x_i - a_i| \leq h_i \quad ; \quad |y_j - b_j| \leq K_j \quad \text{con: } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, p \end{matrix},$$

nel quale le funzioni sono tutte finite e continue insieme alle loro derivate parziali prime.

Chiameremo Jacobiano o determinante funzionale il determinante:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \frac{\partial f_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}$$

Costituito dalle derivate parziali prime delle singole funzioni rispetto alle $y_1, y_2, \dots, y_p$.

Lo Jacobiano si indica anche con:

$$\frac{d(f_1, f_2, \dots, f_p)}{d(y_1, y_2, \dots, y_p)} ; \text{ oppure: } \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_p)} ; \text{ oppure: } J \begin{pmatrix} f_1, f_2, \dots, f_p \\ y_1, y_2, \dots, y_p \end{pmatrix} ;$$

oppure: $D \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_p \\ y_1 & y_2 & y_p \end{pmatrix}$; od anche $d \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{pmatrix}$.

(Troppi nomi per una stessa cosa).

Se lo Jacobiano è diverso da zero in un intorno di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, si ha un solo sistema di funzioni:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_p = y_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

che in $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ prendono rispettivamente i valori: $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ e soddisfano le equazioni del sistema.

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta tangente alla curva intersezione delle superfici: $f(x, y, z) = 0$; $\varphi(x, y, z) = 0$, da cui siamo partiti. Supponiamo noto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ comune alle due superfici, cioè verifica le loro equazioni e quindi appartiene alla curva intersezione. Lo Jacobiano sia diverso da zero: $J \begin{pmatrix} f & \varphi \\ y & z \end{pmatrix} \neq 0$

Possiamo definire: $y = y(x)$; $z = z(x)$; che soddisfano le equazioni e rappresentano le

equazioni di una curva Γ intersezione delle superfici.

la matrice funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

basta abbia caratteristica 2 in un intorno di P per poter affermare che le due superfici si intersecano secondo una curva Γ .

Se fosse diverso da zero il minore:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Le equazioni parametriche della curva Γ saranno: $x = x(t)$; $y = y(t)$

La retta tangente a Γ avrà per equazione:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{dx} = \frac{(y-y_0)}{dy} = \frac{(z-z_0)}{dz}}$$

ma essendo: $f(x,y,z) = 0$; $\varphi(x,y,z) = 0$,

anche:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

e sostituendo a: dx, dy, dz , le quantità proporzionali: $(x-x_0); (y-y_0); (z-z_0)$, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

Che sono le equazioni di due piani che intersecandosi definiscono la retta tangente alla curva Γ intersezione, quest'ultima, delle superfici: $f(x,y,z)=0$ e $\varphi(x,y,z)=0$.

Esempio numerico:

Siano: $f(x,y,z)=0 = (x-z^3)=0$

$$\varphi(x,y,z)=0 = (x^2-y^3)=0$$

eseguiamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3y^2 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

avremo la matrice funzionale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3z^2 \\ 2x & -3y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

ove si nota che qualunque minore (del secondo ordine) si estragga da essa, è diverso da zero, salvo il punto: $(x=0 ; y=0 ; z=0)$, cioè la matrice ha caratteristica due.

Riscriviamo le due funzioni in x :

$$z = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad y = \sqrt[3]{x^2}$$

(notiamo che rappresentano due cilindri aperti, uno in direzione y , l'altro in direzione z)

L'equazione dei due piani che definiscono la retta tangente sarà:

$$\begin{cases} 1(x-x_0) + 0(y-y_0) - 3z_0^2(z-z_0) = 0 \\ 2x_0(x-x_0) - 3y_0^2(y-y_0) + 0(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} (x-x_0) - 3z_0^2(z-z_0) = 0 \\ 2x_0(x-x_0) - 3y_0^2(y-y_0) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo il punto $P_0 \equiv (1, 1, 1)$, esso verifica entrambe le equazioni delle superfici, perciò appartiene alla curva intersezione dei due cilindri, l'equazione dei piani per P_0 diventa:

$$\begin{cases} (x-1) - 3(z-1) = 0 \\ 2(x-1) - 3(y-1) = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x + 0 - 3z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 0 + 1 = 0 \end{cases}$$

che è l'equazione della retta tangente in P_0 alla curva Γ .

Poiché: $x = z^3$; $x = \sqrt{y^3}$;

$$z^3 = \sqrt{y^3}$$

l'equazione: $z = \sqrt{y}$ sarà l'equazione della proiezione di Γ sul piano yZ

Derivazione di funzioni composte

La funzione: $z = f(x, y)$, sia tale che x ed y siano parametricamente espressa da:

$$x = x(t) \quad \text{ed} \quad y = y(t)$$

ove t è divenuta variabile indipendente.

A noi interessa la derivata di z rispetto a "t" cioè,

$$z'_{(t)} = \frac{dz}{dt} \quad \text{cioè: } dz = z'_t dt$$

ma noi sappiamo sviluppare il differenziale

totale: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

per cui sostituendo:

$$z'_{(t)} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

È questa la formula per la derivazione delle funzioni composte.

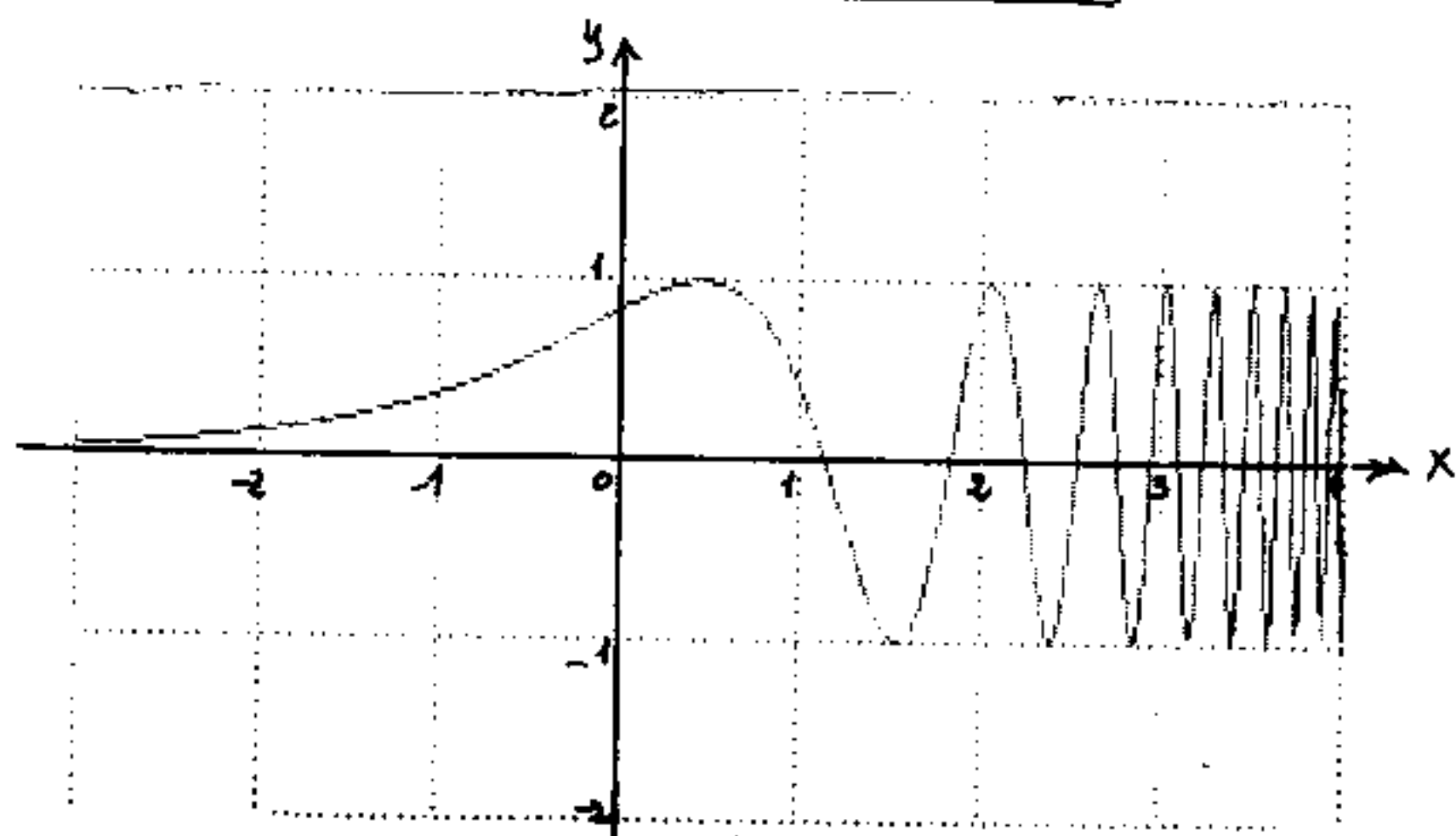
sia: $z = x^2 + y^2$ e sia $x = \ln|t|$; $y = \sin(t)$;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^x} ; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t = \sqrt{1-y^2}$$

$$z'_t = (2x) \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = \boxed{z'_t = \frac{2x}{e^x} + 2y\sqrt{1-y^2}}$$

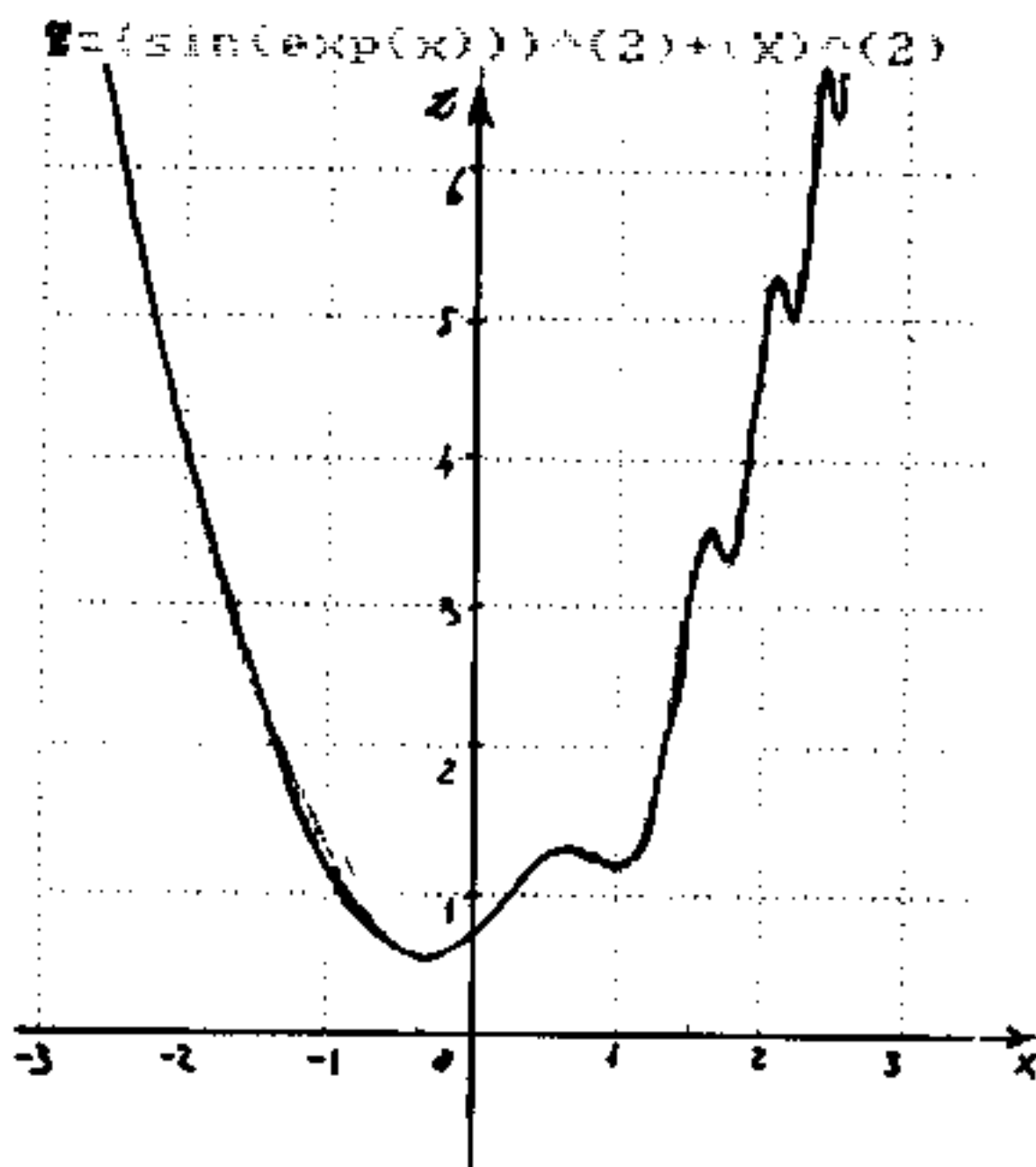
nell'esempio numerico osserviamo: Se consideriamo "t" la variabile indipendente, essa può prendere solo valori positivi, affinché, esista la $x = \ln|t|$, perciò poniamo il valore assoluto alla $y = \sin(t)$, limita i valori della y fra -1 e $+1$. Se cerchiamo di realizzare il grafico notiamo che per ogni valore di "t" si ha un punto nel piano, cioè x e y non sono indipendenti, ma legati funzionalmente. $y = \sin t$; $x = \ln|t|$; $t = e^x = \exp(x) = \arcsin(y)$; per cui:

$$y = \sin(\exp(x))$$



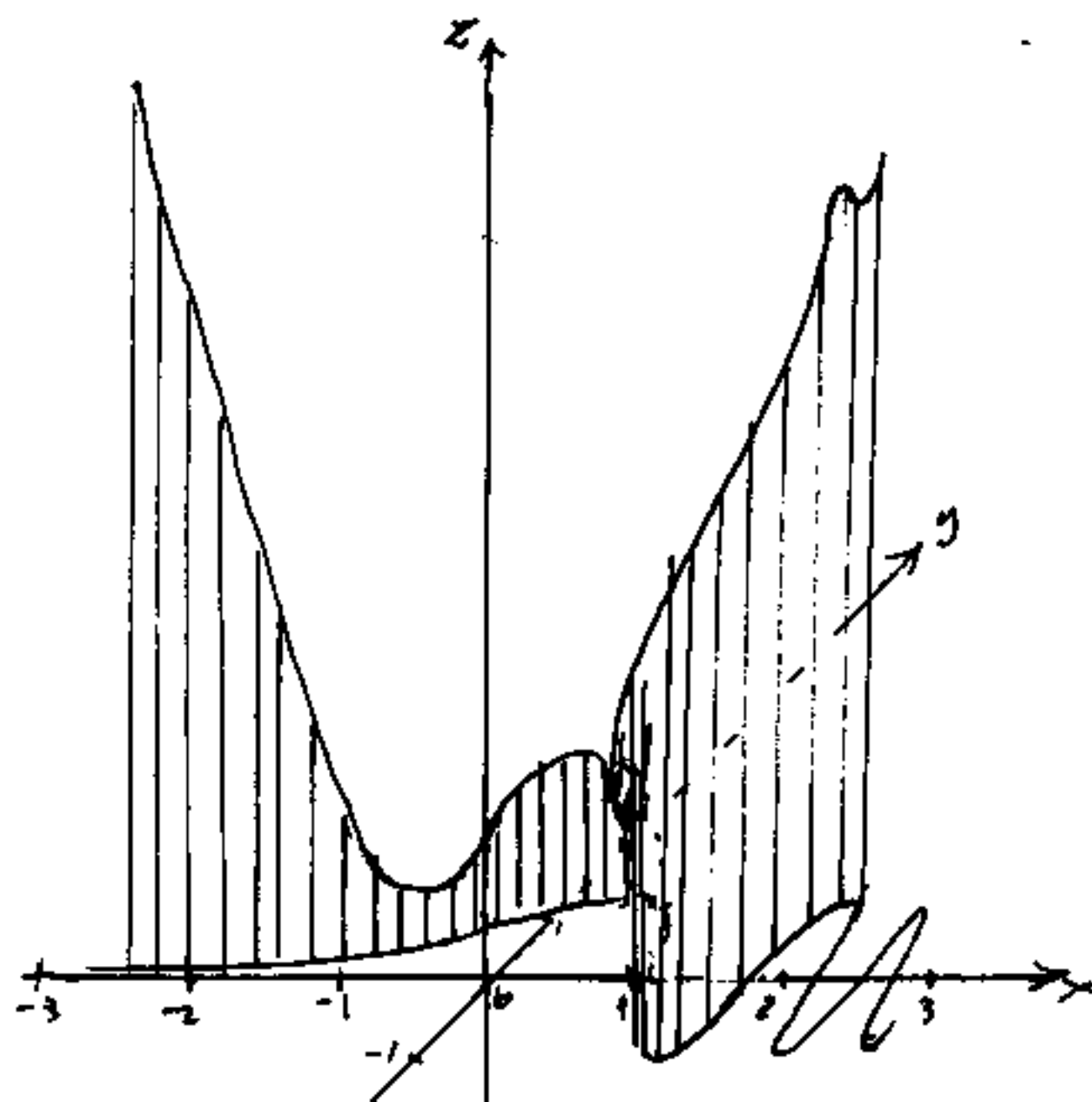
per ciascuno di questi punti vale la $z = x^2 + y^2$ cioè: $z = (\sin(\exp(x)))^2 + x^2$; abbiamo con ciò espresso il valore di z per ogni valore di x , cioè possiamo vedere la superficie proiettata

sul piano xz ed avremo il disegno che riportiamo a fianco.

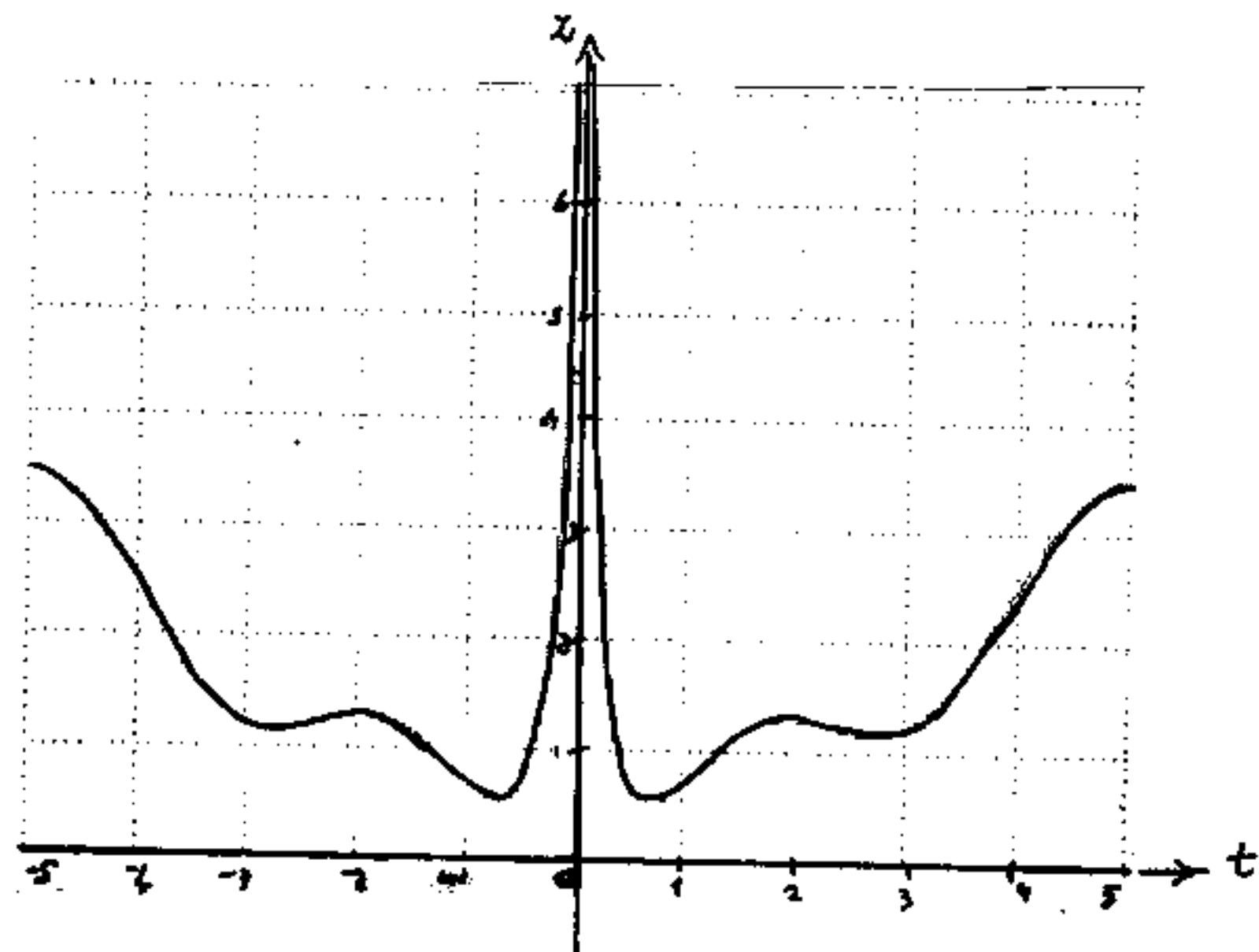


Noi dobbiamo però pensare le ordinate z , uscenti dal grafico sul piano xy di cui alla pagina precedente, allora possiamo fare un disegno prospettico, ed

otterremo una linea nello spazio tridimensionale



Se esprimiamo direttamente la z in funzione di t , cioè: $z = (\ln|t|)^2 + (\sin(t))^2$ otteniamo il grafico: (ore per $t=0 \rightarrow z=\infty$)



Cioè per $t=0$ si ha $\log(0) = -\infty = x$, per avere: $x = -3$ occorre $t = 0,04978707$; per avere: $x = +3$ occorre $t = 20,08553692$.

Se a t attribuiamo il concetto: "tempo" la funzione composta che ci ha portati a rappresentare una linea in campo tridimensionale diventa una "traettoria" spaziale. Quindi mediante funzioni composte è possibile rappresentare traiettorie spaziali.

Osservazioni sull' Jacobiano

Nello studio delle funzioni, lo Jacobiano è di fondamentale importanza.

Se funzioni sono lineari lo Jacobiano si riduce ai coefficienti.

Se le funzioni non sono indipendenti, il determinante è nullo.

Per stabilire se un sistema di funzioni si può invertire, infatti se lo Jacobiano, costruito con le derivate parziali prime, eseguite rispetto alle singole variabili risulta diverso da zero, esiste uno ed un solo sistema di funzioni:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

che inverte il sistema

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Se lo Jacobiano è nullo le n funzioni non sono indipendenti, ma legate da relazioni funzionali.

Più in generale si abbia m funzioni in n variabili e per esse facciamo la matrice funzionale, avente per elementi le derivate

parziali delle funzioni rispetto alle variabili:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Se la matrice ha caratteristica m , le m funzioni sono indipendenti; se ha caratteristica r , vuol dire che fra le m funzioni è possibile estrarre r funzioni indipendenti.

Se si hanno n funzioni: $y_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $y_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$... $y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che sono funzioni di funzioni in quanto le x sono a loro volta funzioni delle ξ cioè $x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; ... $x_n = x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ possiamo considerare le y_i come funzioni composte delle $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ per mezzo delle $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Se vogliamo la derivata parziale di y_i rispetto a ξ_r avremo: $\frac{\partial y_i}{\partial \xi_r} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_r} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_r} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_r}$

con $(i=1, 2, 3, \dots, m)$; e $(r=1, 2, 3, \dots, n)$ cioè:

$\left(J \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \right) \cdot \left(J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \right) = \left(J \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \right)$ che è il prodotto dei determinanti funzionali.

Inversione di un sistema di funzioni

Date due funzioni u, v nelle due variabili x, y ;

$$\text{ove: } u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

e sia diverso da zero lo Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto che verifica il sistema: $u_0 = u(x_0, y_0)$; $v_0 = v(x_0, y_0)$.

$$\text{Poniamo: } \varphi(u, v, x, y) = u(x, y) - u = 0$$

$$\psi(u, v, x, y) = v(x, y) - v = 0$$

Lo Jacobiano:

$$J = \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} = \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \neq 0$$

identico a quello già scritto e diverso da zero per ipotesi. Perciò esistono due e due sole funzioni che

Vogliamo trovare che sono: $x = x(u, v)$

ed $y = y(u, v)$ le quali soddisfanno, nell'intorno di $P_0 \equiv (u_0, v_0)$. Chiameremo queste funzioni inverse delle funzioni date.

Differenziando le funzioni date si ha:

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy ; \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy : \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{sistema lineare} \\ \text{rispetto a } dx, dy \end{array}$$

Se risolviamo il sistema nelle incognite dx, dy , con Cramer, notiamo che il determinante dei coefficienti è lo Jacobiano che abbiamo indicato con J , perciò sostituendo la colonna dei termini noti si ha:

$$\boxed{dx = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} du & \frac{\partial u}{\partial y} \\ dv & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}; \quad \boxed{dy = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & du \\ \frac{\partial v}{\partial x} & dv \end{vmatrix}}$$

cioè:

$$\boxed{dx = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial v}{\partial y} du - \frac{\partial u}{\partial y} dv \right)}; \quad \left(dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$$

$$\boxed{dy = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dv - \frac{\partial v}{\partial x} du \right)}; \quad \left(dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$$

Perciò confrontando:

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y}$
$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x}$

Differenziando ulteriormente si ottengono d^2x, d^2y ; e le derivate parziali del secondo ordine.

Dalle derivate parziali ora trovate, è possibile scrivere lo Jacobiano delle

funzioni inverse:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = (\text{sviluppando})$$
$$= \frac{1}{J^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \left(\frac{1}{J^2} \right) [J] = \frac{1}{J}$$

Perciò lo Jacobiano delle funzioni inverse è il reciproco del determinante Jacobiano delle funzioni date.

Il procedimento può estendersi ad n funzioni in n incognite: $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $(i=1, 2, \dots, n)$ se lo Jacobiano è diverso da zero, esiste uno ed un solo sistema di funzioni inverse:

$$x_j = x_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{con } (j=1, 2, \dots, n)$$

il cui Jacobiano è il reciproco di quello ottenuto con le funzioni date.

Massimi e minimi di funzioni implicite.

Sia data la funzione: $f(x, y) = 0$

(che in un certo campo ammetta coordinate che la soddisfanno.)

abbiamo: $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

Se esiste un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ in cui la y è max o min, in tale punto dovrà essere:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0, y_0} = 0 ; \text{ ed avremo anche: } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = 0$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$ (condizione per il teorema del Dini).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

possiamo scrivere:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ ed anche: } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} (y') = 0$$

derivando si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

$$\text{cioè: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

nel punto (x_0, y_0) si ha: $y' = 0$ perciò:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0, y_0)} + y''_{(x_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

da cui:

$$y''_{(x_0)} = \frac{-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0, y_0)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}}$$

I segni delle derivate parziali determinano il segno di $y''_{(x_0)}$, perciò se i segni sono concordi $y'' < 0$ si ha un MASSIMO

se i segni sono discordi avremo: $y'' > 0$ e quindi un minimo

ESEMPIO: $f(x, y) = (x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 2 = 0 \rightarrow y_0 = (1 - x_0) \text{ sostituendo:}$$

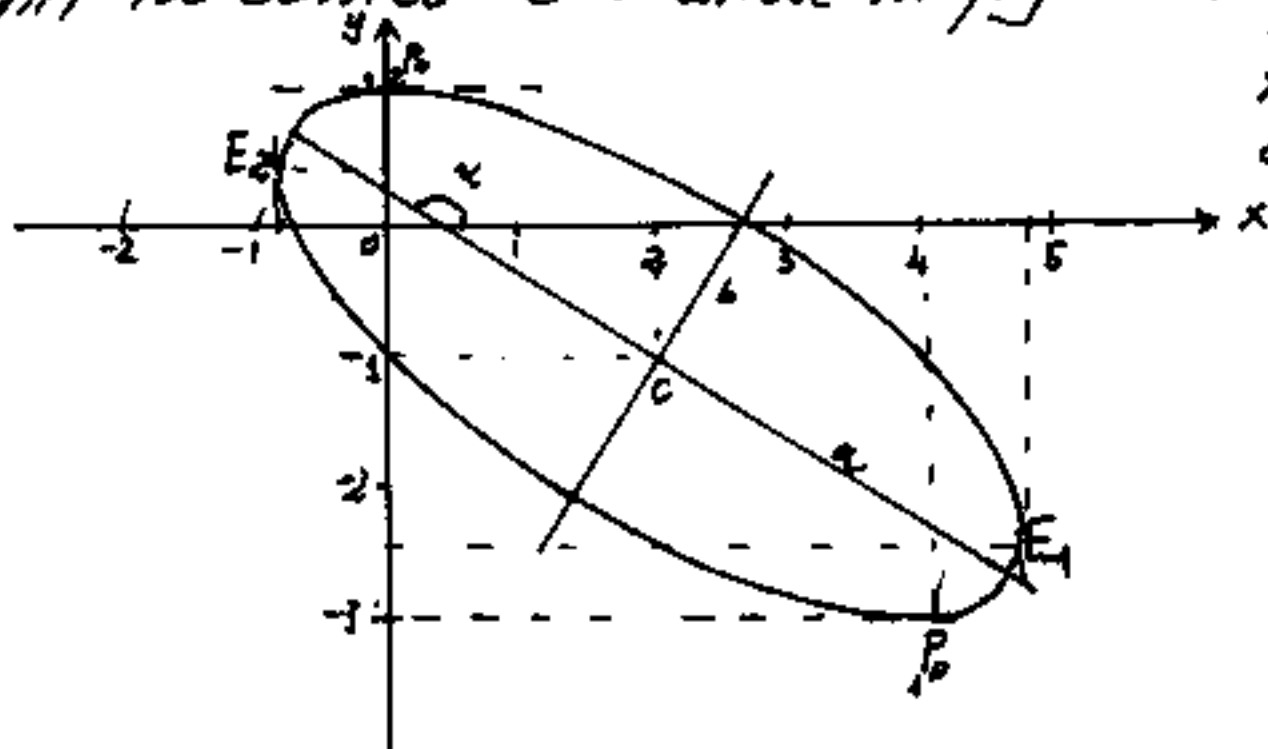
$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + 2(1 - x_0)^2 + 2(x_0)(1 - x_0) - 2x_0 - 2 = 0$$

$$= x_0^2 + 2 - 4x_0 + 2x_0^2 + 2x_0 - 2x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0$$

$$\text{cioè } x_0^2 - 4x_0 = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 0 ; y_0 = 1 \\ x_0 = 4 ; y_0 = -3 \end{cases}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0, y_0)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}} = \frac{-2}{(4y + 2x)} \quad \begin{cases} \frac{-2}{4 \cdot 1 + 2 \cdot 0} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ (massimo); } (0, 1) \\ \frac{-2}{4(-3) + 8} = +\frac{1}{6} > 0 \text{ (minimo); } (4, -3) \end{cases}$$

Sinfatti la conica è l'ellisse in figura: $a = 3,236068$
 $b = 1,236068$
 $x_c = 2 ; y_c = -1$
 $\alpha = 148^\circ ; 16' 57''$



Estremi di una funzione implicita

Abbiamo già detto che nella espressione di una funzione implicita: $f(x, y, z, t, \dots) = 0$ non vi sono caratteristiche per riguardare una o più variabili come dipendenti o come indipendenti, perciò le nostre dizioni di massimo e di minimo, si riferivano alla variabile dipendente esplicitata; (normalmente, $y=f(x)$ nel piano e $z=f(x, y)$ nello spazio tridimensionale) non hanno più senso e si possono chiamare: estremi delle variabili.

L'esempio precedente calcolava gli estremi in y calcoliamo ora gli estremi in x. $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2x = 0$

cioè: $(x = -2y)$; sostituendo: $4y^2 + 2y^2 - 4y^2 + 4y - 2 = 0$; $y_0 = -1 \pm \sqrt{2}$

$$E_1 \equiv (4,8484; -2,4142); E_2 \equiv (-0,8284; +0,4142)$$

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x,y_0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,y_0}} = \frac{-(+4)}{2x + 2y - 2} \begin{cases} E_1 < 0 & \text{(massimo valore della x)} \\ E_2 > 0 & \text{(minimo valore della x)} \end{cases}$$

Anche: $f(x, y, z) = 0$, ammetterà estremi assoluti e max e min relativi per tutte le variabili riguardate come dipendenti; per es. $(x + y^2 + \sin z) = 0$, in quanto sono esplicitabili le tre variabili; è facile vederne il campo: $-x = y^2 + \sin z$; $y = \sqrt{-x - \sin z}$; $z = \arcsin(y^2 - x)$;

$$x \leq +1; \text{ per } x = +1; z = \frac{3}{2}\pi; y = 0 \quad \text{(max valore della x).}$$

L'identità di Eulero sulle derivate delle funzioni omogenee

Premettiamo delle definizioni:

Diciamo: monomio il prodotto di fattori espressi da numeri, lettere, simboli di variabili.

I simboli delle variabili possono presentarsi elevati a potenza, in questo caso dicesi grado del monomio la somma degli esponenti
esempio: $3xy^3z^2$ è un monomio di grado $1+3+2=6$.

Dicesi polinomio la somma algebrica di monomi

Dicesi grado di un polinomio il grado massimo dei monomi che lo costituiscono.

esempio: $ax + bxy + z^3 - 5xz^4$ (quinto grado)

Un polinomio si dice omogeneo quando tutti i monomi che lo costituiscono sono dello stesso grado.

Un polinomio con variabili è una funzione algebrica. Se i singoli monomi di una funzione sono affetti da operatori trascendenti (eq, sen, cos, tang ecc) la funzione è detta trascendente.

Un funzione: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definita in tutto lo spazio n dimensionale salvo casi particolari di punti su piani passanti per l'origine, si dice: omogenea, o meglio, omogenea positiva rispetto alle variabili: $x_1, x_2, \dots, x_n$, quando in qualunque punto della funzione, posto un qualunque parametro $t > 0$ (positivo), esprimendo le x_i come prodotto $t \cdot x_i$, si abbia:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ove " m " è il grado di omogeneità.

Se sono nulle tutte le coordinate variabili, cioè $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, si ha:

$$f(0, 0, \dots, 0) = t^m f(0, 0, \dots, 0) \text{ per cui}$$

$f(0, 0, \dots, 0) = 0$ (non mutando se moltiplicata per $t^m > 0$ avendo $tx_1 = tx_2 = \dots = tx_n = 0 = x_1 = x_2 = \dots = x_n$).

Facciamo alcuni esempi:

1) funzioni omogenee di grado zero

$$u = \frac{3x}{2x+5y} = \frac{3tx}{2tz+5ty} = \frac{t}{t} \frac{3x}{2x+5y} = t^0 \left(\frac{3x}{2x+5y} \right)$$

$$u = \sin \left(\frac{3x}{2x+5y} \right) = t^0 \sin \left(\frac{3x}{2x+5y} \right)$$

(In quanto di grado zero ($t^0=1$) posso porre in evidenza fuori di " f " = (sen), il fattore t^m . --)

Se fosse:

$$u = \sin(tx) \neq t \sin(x).$$

vediamo ora:

2) funzioni omogenee di grado 1

$$u = \sqrt{ax^2 + bxy + cz^2 + dyz} \quad (\text{puo' esprimersi})$$

$$u = \sqrt{at^2x^2 + bt^2xy + ct^2z^2 + dt^2yz} = \left(\begin{array}{l} \text{essendo } x, y, z \\ \text{variabili} \end{array} \right)$$

$$u = \sqrt{t^2(ax^2 + bxy + cz^2 + dyz)} =$$

$$u = t \sqrt{ax^2 + bxy + cz^2 + dyz}$$

$$t = t^1$$

Il simbolo di funzione: $\sqrt{\quad}$ accetta espressioni di polinomi il cui grado pari possa essere diviso per 2, in modo da poter evidenziare: $t^2 \sqrt{\dots} = \sqrt{t^4 \dots}$

Si noti: $t = \text{intero positivo}$

3) funzioni omogenee di grado 2

$$u = 3x^2 + xy + z^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) + zy e^{\frac{z}{x}} + z\sqrt{xy}$$

$$u = 3t^2x^2 + t^2xy + t^2z^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) + zy t^2 e^{\frac{z}{x}} + zt^2 \sqrt{xy}$$

$$u = t^2 \left(3x^2 + xy + z^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) + zy e^{\frac{z}{x}} + z\sqrt{xy} \right)$$

Si noti che i singoli addendi possono avere fattori con funzioni omogenee di grado zero che non invalidano l'omogeneita' della u

Resta valida l'espressione:

$$f(tx_1 + tx_2 + tx_3 + \dots + tx_n) = t^m f(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

ove: t^m è in evidenza rispetto ad f

Vogliamo ora dimostrare che la derivata
di una funzione omogenea di grado "m"
è una funzione omogenea di grado: "m-1"

Sappiamo che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

cioè:

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial x_i} \frac{d tx_i}{d x_i} = t^m \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

essendo: $t^m = \text{costante}$ ed essendo $\frac{d tx_i}{d x_i} = t$

abbiamo:

$$\left(\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial x_i} \right) t = t^m \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial f(tx_1 + tx_2 + \dots + tx_n)}{\partial x_i} = t^{m-1} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right)$$

che è la condizione di omogeneità; la
relazione può vedersi meglio se indichiamo le
derivate parziali rispetto a x_i col simbolo:

$$f_{x_i}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^{m-1} f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Se poniamo: $u_i = t x_i$, abbiamo:

$$\sum_1^n f(u_i) = t^m \sum_1^n f(x_i)$$

ed essendo:

$$\frac{du_i}{dt} = x_i \quad \text{derivando si ha:}$$

$$\sum_1^n \frac{\partial f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial x_i} x_i = \frac{\partial t^m \sum_1^n f(x_i)}{\partial t} = m t^{m-1} \sum_1^n f(x_i)$$

e moltiplicando per t e sostituendo $u_i = x_i \cdot t$:

si ha:

$$\boxed{\sum_1^n \frac{\partial f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial x_i} u_i = m f(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

che è l'identità di Eulero e può scriversi:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = m f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

e si enuncia:

Se una funzione è omogenea di grado m , in ogni punto interno al campo di esistenza, la somma dei prodotti delle coordinate di quel punto, per le corrispondenti derivate parziali della funzione (rispetto alla coordinata moltiplicatore) calcolate nello stesso punto, vale il prodotto del valore della funzione per il grado di omogeneità.

Per due sole variabili, in ogni punto P della sua esistenza, $f(x, y) = z$, l'identità di Eulero sarà:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P x_P + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P y_P = m \cdot f(x_P, y_P)}$$

esempio:

$$z = ax^2 + bxy + cy^2, \quad x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = (2ax_P + by_P) x_P; \quad y_P \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = (bx_P + 2cy_P) y_P = 2 f(x_P, y_P)$$

Se una funzione omogenea in due variabili è uguagliata a zero si può dividere per la variabile a massimo grado riducendo così l'espressione ad una sola variabile e ciò può consentire risoluzioni facilitate. (Esempio)

$$a x^3 y + b x^2 y^2 + c x y^3 + e y^4 + x^4 = 0$$

dividendo per x^4 :

$$a \left(\frac{y}{x} \right) + b \left(\frac{y}{x} \right)^2 + c \left(\frac{y}{x} \right)^3 + e \left(\frac{y}{x} \right)^4 + 1 = 0$$

ove $\left(\frac{y}{x} \right)$ è la nuova variabile che può essere una nuova incognita più facile a calcolarsi.

Si noti che tutte le funzioni omogenee positive di grado m possono considerarsi integrali dell'equazione alle derivate parziali. (vedi, più avanti, il capitolo equazioni differenziali). (Teorema di Euler)

Se, per rimanere in campo reale, consideriamo " m " intero, e si ha che la relazione:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

è verificata qualunque sia il valore di t positivo o negativo diremo che l'espressione è Omogenea di grado m . (si omette la parola positiva)

La più generale funzione omogenea di grado m ha la forma: $x_1^m \varphi \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right)$ con φ = funzione arbitraria nei suoi argomenti.

Massimi e minimi condizionati

Abbiamo già accennato che p equazioni in $(m+p)$ incognite permettono di risolvere (esplicitare) p incognite in funzione delle restanti m variabili (arbitrarie e quindi indipendenti). Anzi per meglio focalizzare questo, abbiamo indicato con y_i le p variabili esplicitabili e con x_i le restanti m variabili.

Consideriamo ora la funzione:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$$

nelle $m+n$ variabili legate fra loro da " n " equazioni indipendenti del tipo:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad \text{con } (i=1, 2, \dots, n)$$

Se le n equazioni sono indipendenti, la matrice funzionale ha caratteristica " n "; cioè lo Jacobiano $\left(\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{d(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0 \right)$ è diverso da zero, e possiamo riguardare le y_i come funzioni delle x_i , cioè, di m variabili indipendenti.

Gli estremi della:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$$

si hanno nei punti ove risulta $df = 0$

cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} dy_n = 0$$

differenziando le n equazioni implicite:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_n} dy_n = 0$$

con $(i=1, 2, \dots, n)$ risolvendo questo sistema di n equazioni rispetto agli n differenziali $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$, e sostituendone i valori nell'espressione differenziale di $df=0$ otterremo una relazione del tipo:

$$L_1 dx_1 + L_2 dx_2 + \dots + L_m dx_m = 0$$

e poiché dx_1, dx_2, dx_m sono arbitrari (piccoli non nulli) dovrà essere:

$$L_1 = 0 ; L_2 = 0 ; \dots ; L_m = 0$$

risolvendo queste " m " equazioni, nelle " m " incognite $x_1, x_2, \dots, x_m$ troviamo le coordinate, dalle quali, mediante il sistema in cui abbiamo esplicitato le y cioè $y_1, y_2, \dots, y_n$ possiamo calcolare le y stesse.

Se queste coordinate verificano il sistema dato, cioè se sono punti della $Z=f(x,y)$ ove $dz=0$, sono le coordinate estremanti della Z .

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Per eliminare i differenziali $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$ nelle n equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} dy_n = 0$$

con: $(i = 1, 2, \dots, n)$, ed arrivare al sistema:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \dots, \quad L_m = 0 \quad (\text{sopradetto})$$

moltiplichiamo per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (per ora indeterminate) le stesse n equazioni differenziali e sommiamole alla:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} dy_n = 0$$

avremo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \right) dx_m + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \right) dy_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_n} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} \right) dy_n = 0$$

dato l'arbitrarietà dei coefficienti λ_i , possiamo sceglierli in modo che risultino nulli i coefficienti di $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$, ed essendo la $\varepsilon = 0$, dovranno essere nulli anche i coefficienti di $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$.

Cioè dovranno soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} \right) = 0 & (r = 1, 2, 3, \dots, m) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y_s} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s} \right) = 0 & (s = 1, 2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

Complessivamente abbiamo così il sistema di n equazioni implicite che determinano la funzione z e le $(n+m)$ equazioni del sistema ora scritto; abbiamo così $(2n+m)$ equazioni per risolvere le $(n+m)$ coordinate degli estremi di z e gli (n) moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Si noti che ciò equivale a cercare gli estremi liberi della funzione: $F = f + \varphi_1 \lambda_1 + \varphi_2 \lambda_2 + \dots + \varphi_n \lambda_n$, nella quale si considerano indipendenti tutte le variabili x_i ed y_j ed i moltiplicatori λ come parametri costanti.

In pratica si opera così e si dice di aver applicato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio

Si cerchi la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano $ax + by + cz + d = 0$

(Problema che abbiamo già risolto per altre vie.)

La distanza è la minima fra le distanze di P_0 dai punti del piano

L'equazione del piano è la $\varphi(x, y, z) = 0$.

La funzione da estremare è:

$$\delta^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

La funzione: $F = \delta^2 + 2\lambda\varphi$.

Annullando le tre derivate parziali della F rispetto ad x, y, z ; cioè: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ abbiamo:
 $(x - x_0) + \lambda a = 0$; $(y - y_0) + \lambda b = 0$; $(z - z_0) + \lambda c = 0$; moltiplicando rispettivamente per a, b, c e sommando, otteniamo: $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) + \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = 0$
 ma: $ax + by + cz = -d$, per cui:

$$\lambda = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

ma abbiamo anche:

$$\delta^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\delta = \lambda (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \quad \text{sostituendo } \lambda$$

$$\boxed{\delta_{\min} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Risultato che già conosceremo e che poteva ottenersi direttamente come distanza di piani paralleli di cui uno dato e l'altro per $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$.

Cambiamento di variabili

Abbiamo già avuto occasione di sostituire certe espressioni o funzioni di variabili con una nuova variabile che semplifichi i calcoli. Un esempio banale è l'integrazione col metodo di sostituzione. Vediamo i criteri che conducono alla sostituzione.

1) Cambiamento della variabile indipendente nelle espressioni differenziali di una sola variabile.

Sia: $y = f(x)$ e sia: $V = V(x, y, y', y'', y''')$ una espressione in x, y e le derivate: $y', y'', y''' \dots$

Cambiamo la variabile indipendente " x " con la:

$$x = x(t)$$

(ove: $x(t)$ è una funzione continua e derivabile fino all'ordine che potrà occorrerci)

Per l'invarianza del differenziale primo per le funzioni di una sola variabile:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(la derivata è un rapporto di differenziali)

per definizione:

$$dy = y'_t dt$$

$$dx = x'_t dt$$

con y ed x funzioni di t

$$dy = y'_x dx$$

$$dy = y'_x x'_t dt$$

ed ancora:

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Quindi questa formula vera per definizione se la x è la variabile indipendente, vale anche se " y " ed " x " si pensano funzioni di una variabile " t " e dy e dx sono calcolati rispetto a quest'ultima variabile

derivando il quoziente: dy/dx si ha:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = y''_{(x)} = \frac{\frac{d(dy)}{dx} \cdot dx - dy \frac{d(dx)}{dx}}{(dx)^2}$$

$$\boxed{y''_{(x)} = \frac{d^2 y \, dx - dy \, d^2 x}{dx^3}}$$

derivata seconda di $y_{(x)}$ per i differenziali di y e di x .

sostituiamo al denominatore:

$$dx^3 = (x'_t dt)^3$$

avremo:

$$y''_{(x)} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{(x'_t)^3}$$

cioè:

$$y''_x = \frac{x'_{(t)} \cdot y''_{(t)} - y'_{(t)} \cdot x''_{(t)}}{(x'_t)^3}$$

Con ciò si sono espresse anche le derivate seconde di $y(x)$ in funzione delle derivate rispetto a t .

ESEMPIO calcolare il raggio di curvatura in coordinate parametriche:

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

sostituendo e semplificando:

$$R = \frac{(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)})^{3/2}}{x'_{(t)} y''_{(t)} - y'_{(t)} x''_{(t)}}$$

$$y'''_{(x)} = \frac{d(y''_{(x)})}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy}{(dx)^3}\right)}{dx}$$

$$y'''_{(x)} = \frac{(d^3 y \cdot dx + d^2 x \cdot d^2 y - d^3 x \cdot dy - d^2 x \cdot d^2 y) dx^3}{(dx)^6} / dx -$$

$$- \frac{(d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy) 3 dx^2 \cdot d^2 x}{(dx)^5} / dx$$

$$y'''_{(x)} = \frac{dx (d^3 y \cdot dx - d^3 x \cdot dy) - 3 d^2 x (d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy)}{(dx)^5}$$

sostituendo in (t)

$$y'''_{(x)} = \frac{x'_{(t)} (y'''_{(t)} \cdot x'_{(t)} - x'''_{(t)} y'_{(t)}) - 3 x''_{(t)} (y''_{(t)} x'_{(t)} - x''_{(t)} y'_{(t)})}{(x'_{(t)})^5}$$

In modo analogo si calcolano le derivate successive. Se x ed y sono funzioni di più variabili: $x = \varphi(t, u)$; $y = \psi(t, u)$; avremo:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du; & dy = \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial u} du; \\ d^2 x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} d^2 t + \frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2 u; \\ d^2 y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} d^2 t + \frac{\partial \psi}{\partial u} d^2 u; \end{cases}$$

da sostituire nelle espressioni trovate.

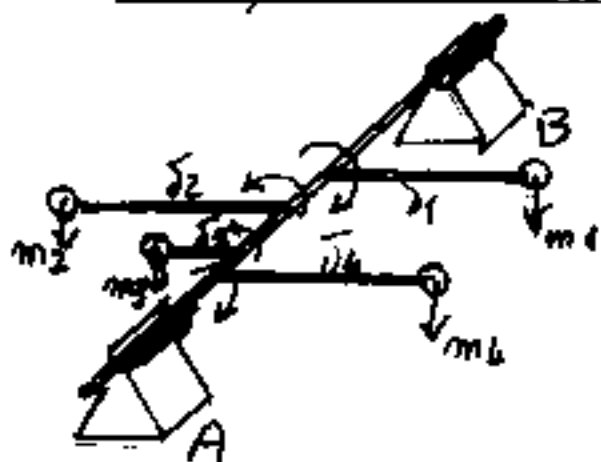
Il calcolo dei baricentri

Il calcolo, in generale, investe il problema dell'equilibrio, di cui si è già fatto cenno, e che tratteremo in seguito.

Occorre considerare due aspetti del calcolo; cioè: "per masse puntiformi" o "per masse continue".

Poiché una volta trovato il baricentro G di una massa continua, per una classe di problemi, posso pensare l'intera massa come fosse concentrata in G , ai fini di ulteriori calcoli; dobbiamo fare molta attenzione ai legami che connettono fra loro le masse puntiformi trattate.

Definizione di momento statico



Consideriamo un'asse libero di ruotare su due appoggi A e B . Dall'asse si diramano tanti

bracci, o una piastra, o altre connessioni che, in campo gravitazionale permettono alle masse $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, rispettivamente distanti $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$, dal piano verticale per l'asse,

di trasmettere all'asse stesso, le azioni di rotazione: $m_1 \delta_1 = S_1$; $m_2 \delta_2 = S_2$; $m_3 \delta_3 = S_3$; ... $m_n \delta_n = S_n$. Tali azioni di rotazione sono dette "momenti statici" e poiché le azioni di rotazione possono avere versi opposti, i momenti statici avranno segno opposto. Per un sistema piano di masse compilmare con l'asse, assunto un segno arbitrario per le distanze dalle due parti rispetto all'asse avremo che l'azione complessiva:

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^n m_i \delta_i$$

del sistema di masse rispetto all'asse AB è detta momento statico delle masse $\sum_{i=1}^n m_i$ rispetto all'asse AB.

Si ha l'equilibrio alla rotazione su AB se $S_{AB} = 0$

Noi diremo Baricentro di un sistema di masse quel punto G ove pensandovi concentrata la sommatoria delle masse, si ottiene lo stesso momento statico ottenuto dalle singole masse, e ciò rispetto a qualunque asse arbitrario.

Se l'asse è baricentrico è evidente che il momento statico è nullo.

In un sistema piano, se gli assi di riferimento sono x ed y avremo: $M = \sum_{i=1}^n m_i$

$$S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (\text{momento statico rispetto ad } y)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (\text{" " " " " " ad } x)$$

$$\left. \begin{aligned} x_G &= \frac{S_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ y_G &= \frac{S_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{aligned} \right\} \underline{\text{coordinate di } G}$$

Se il sistema di masse è uniformemente distribuito nel piano. (cio' avviene per una lastra di spessore costante s e densità costante γ) avremo che l'elemento di massa infinitesimo dm è dato dal prodotto del volume infinitesimo dv per la densità: ($dm = \gamma dv$) e quest'ultimo dall'area infinitesima per lo spessore: ($dv = s dA$) cioè: $dm = (\gamma s) dA$ la



massa elementare " dm " è proporzionale all'area elementare " dA "

Perciò estendendo ai sistemi continui i risultati ottenuti per le masse puntiformi avremo:

$$M = \gamma_s \int dA = \gamma_s A$$

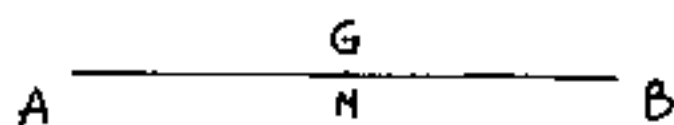
$$S_y = \gamma_s \int_A x dA = \int_M x dm$$

$$S_x = \gamma_s \int_A y dA = \int_M y dm$$

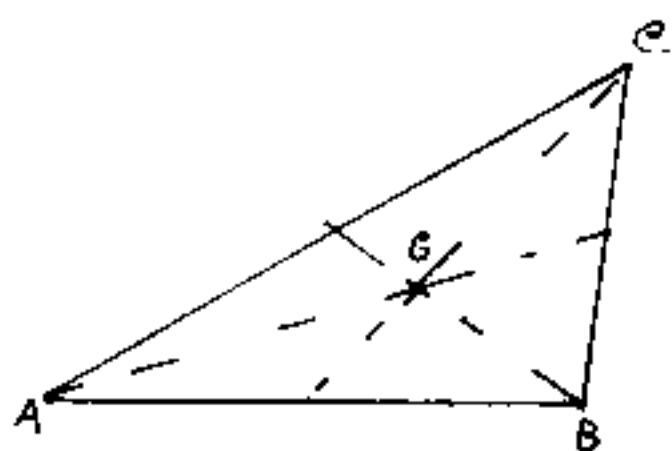
$$\frac{S_y}{M} = x_G = \frac{\gamma_s \int x dA}{\gamma_s \int dA} = \boxed{x_G = \frac{S_y}{A}}$$

$$\frac{S_x}{M} = y_G = \frac{\gamma_s \int y dA}{\gamma_s \int dA} = \boxed{y_G = \frac{S_x}{A}}$$

Facciamo alcuni esempi di Baricentri

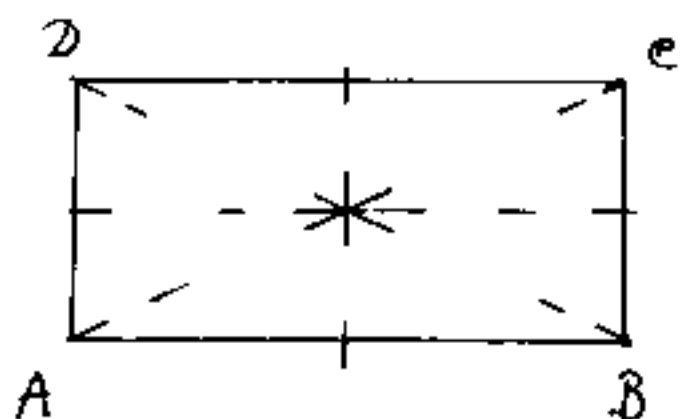


Di un segmento $G =$ punto medio



di un triangolo:

$G =$ incontro mediane

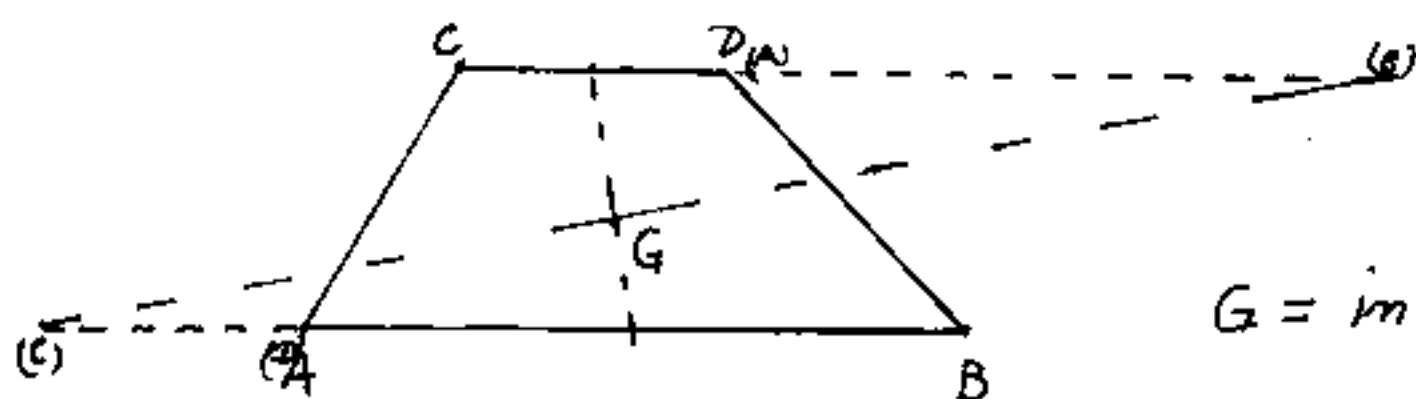


di un rettangolo (o quadrato)

$G =$ incontro mediane

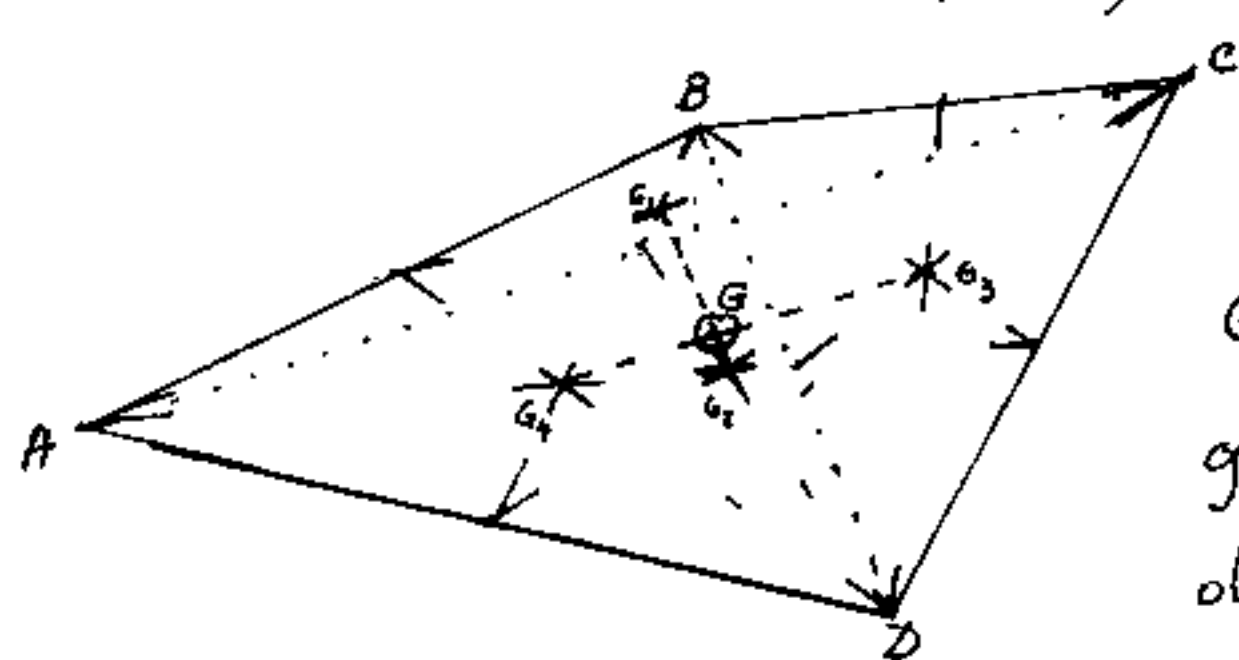
ed anche: incontro diagonali.

di un trapezio



G = incontro sulla
mediana delle basi

con la congiungente gli estremi della somma
delle basi ottenuta aggiungendo a ciascuna
base l'altra (due bande opposte).

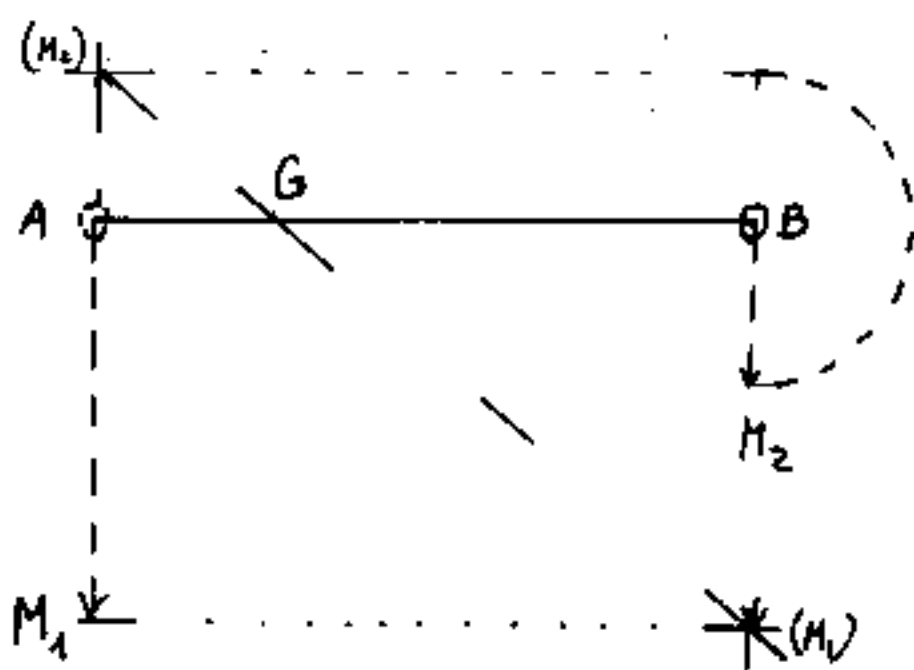


di un quadrilatero

G = sulle congiun=
genti i baricentri
dei triangoli in cui

puo' essere scomposto dalle diagonali.

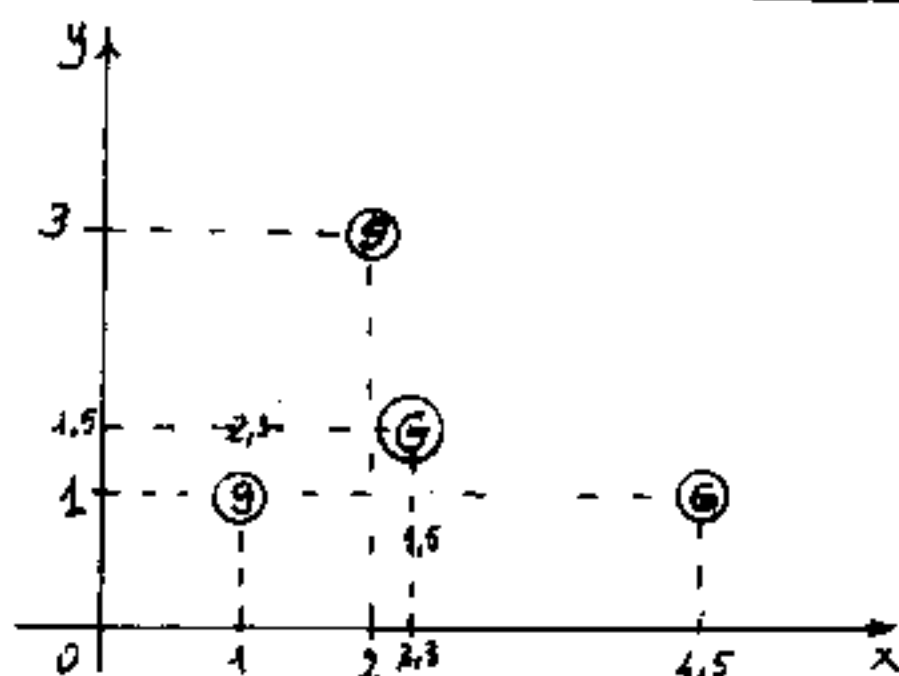
di due masse diverse (o due forze parallele)



G = intersezione del seg=
mento $\overline{AB}$ congiungente
le due masse con la
retta congiungente le

punte delle due forze che le rappresentano e che
si sono scambiata la posizione ed una è opposta.

masse puntiformi



$$m_1 = 9 \equiv (1, 1)$$

$$m_2 = 5 \equiv (2, 3)$$

$$m_3 = 6 \equiv (4.5, 1)$$

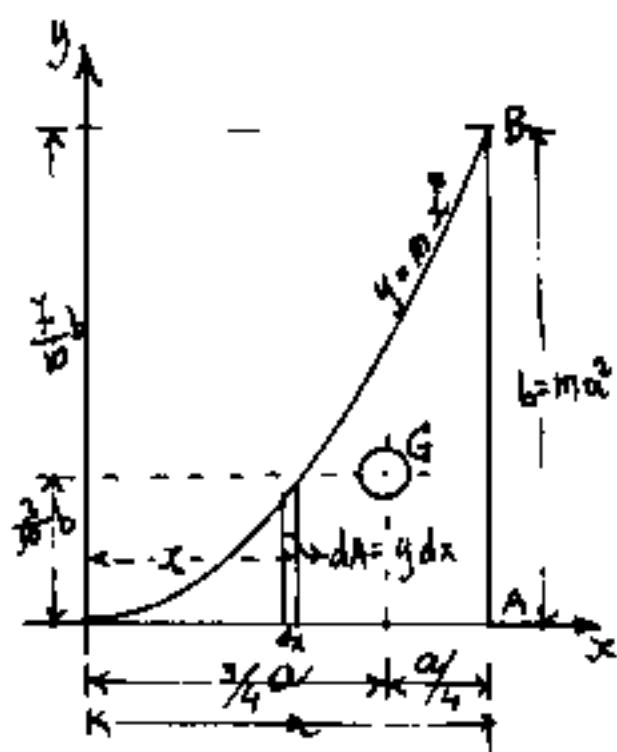
$$\Sigma m = M = 20$$

$$S_y = 9 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4.5 = 46 ; \quad \frac{S_y}{M} = \frac{46}{20} = \boxed{X_G = 2.3}$$

$$S_x = 9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 30 ; \quad \frac{S_x}{M} = \frac{30}{20} = \boxed{Y_G = 1.5}$$

Le masse m_1, m_2, m_3 , possono essere i consumi giornalieri di energia termica, in tal caso G rappresenta la più conveniente posizione della centrale generatrice.

Triangolo parabolico (OAB)



$$A = \int_0^a m x^2 dx = \frac{ma^3}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{ab}{3}}$$

$$S_y = \int_0^a m x^3 dx = \frac{ma^4}{4}$$

$$\boxed{S_y = \frac{a^2 b}{4}}$$

$$S_x = \int_0^a \frac{y}{2} dA = \int_0^a \frac{m^2 x^4}{2} dx = \frac{ma^5}{10}$$

$$\boxed{S_x = \frac{b^2 a}{10}}$$

$$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{b a^2 / 4}{b a / 3} = \frac{3}{4} a$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{b^2 a / 10}{b a / 3} = \frac{3}{10} b$$

$$\boxed{G \equiv \left(\frac{3}{4} a, \frac{3}{10} b \right)}$$

baricentro di un spezzata

siano $A \equiv (1; 2)$; $B \equiv (2,5 ; 3)$; $C \equiv (4,5 ; 3,5)$; $D \equiv (6,5 ; 2,5)$

i vertici della linea

spezzata, avremo

che le coordinate

dei baricentri dei
singoli tratti saran-

no: $G_{AB} \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

$$G_{BC} \equiv \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) ; \quad G_{CD} \equiv \left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2} \right)$$

le lunghezze dei singoli tratti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} ; \quad \overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} ; \quad \overline{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$\text{Numericamente: } \overline{AB} = \sqrt{3,25} ; \quad \overline{BC} = \sqrt{4,25} , \quad \overline{CD} = \sqrt{5}$$

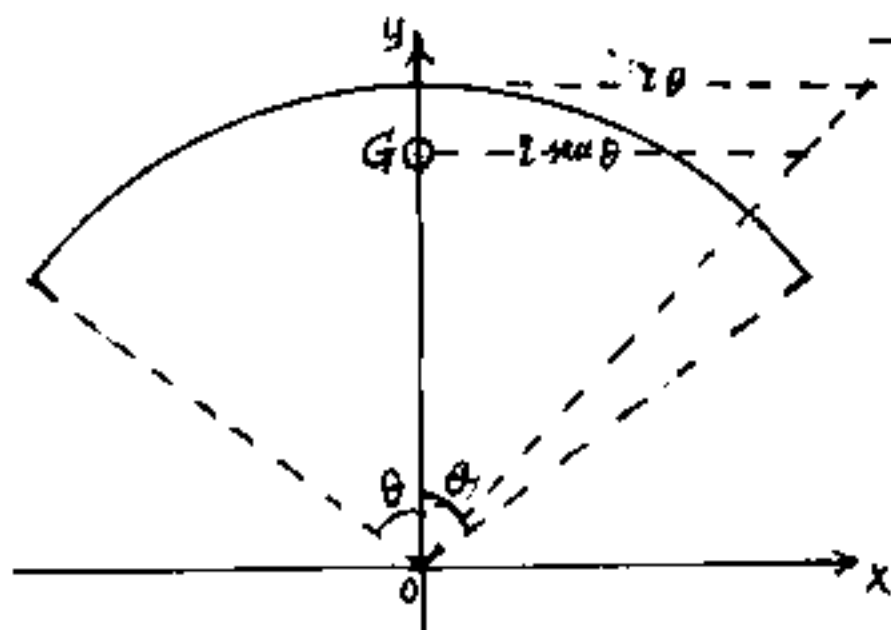
$$G_{AB} \equiv (1,75 ; 2,5) ; \quad G_{BC} \equiv (3,5 ; 3,25) ; \quad G_{CD} \equiv (5,5 ; 3) ;$$

$$S_y = (1,75\sqrt{3,25} + 3,5\sqrt{4,25} + 5,5\sqrt{5}) = 22,66866609$$

$$L = \sqrt{3,25} + \sqrt{4,25} + \sqrt{5} = 6,100396428 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_G = 3,715993 \\ y_G = 2,936725487 \end{array}$$

$$S_x = (2,5\sqrt{3,25} + 3,25\sqrt{4,25} + 3\sqrt{5}) = 17,91518967$$

Arco di cerchio



$$L = 2r\theta ; \quad S_x = 2 \int_0^\theta r \cos \theta d\theta$$

$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{2r^2 \sin \theta}{2r\theta} =$$

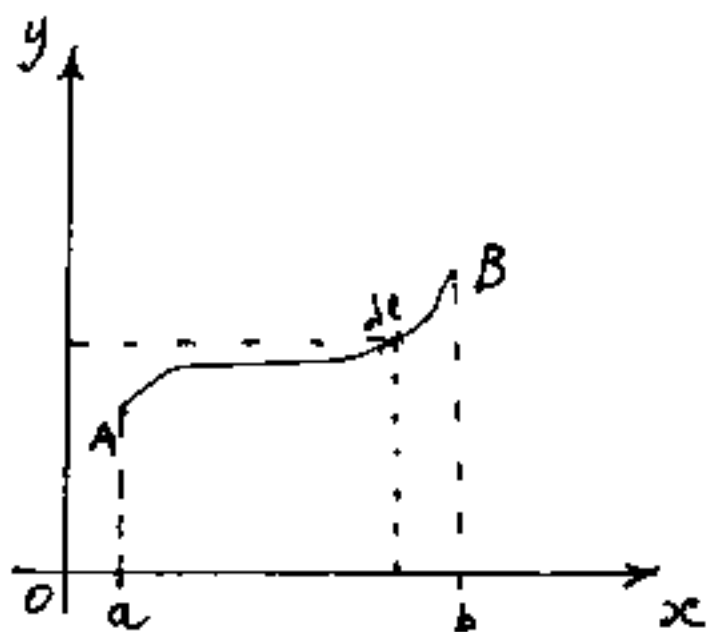
$$\boxed{y_G = r \frac{\sin \theta}{\theta}}$$

$$y_G = r (\text{sinc } \theta)$$

Il baricentro di una linea

Se la linea è simmetrica rispetto ad un asse, il baricentro è sull'asse di simmetria, e quindi basta una sola coordinata per individuarlo.

Sia $y = f(x)$, detto $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$ l'elemento di lunghezza, avremo che la lunghezza del tratto $\overline{AB}$ di linea sarà: $L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$, e che i momenti statici rispetto agli assi saranno:

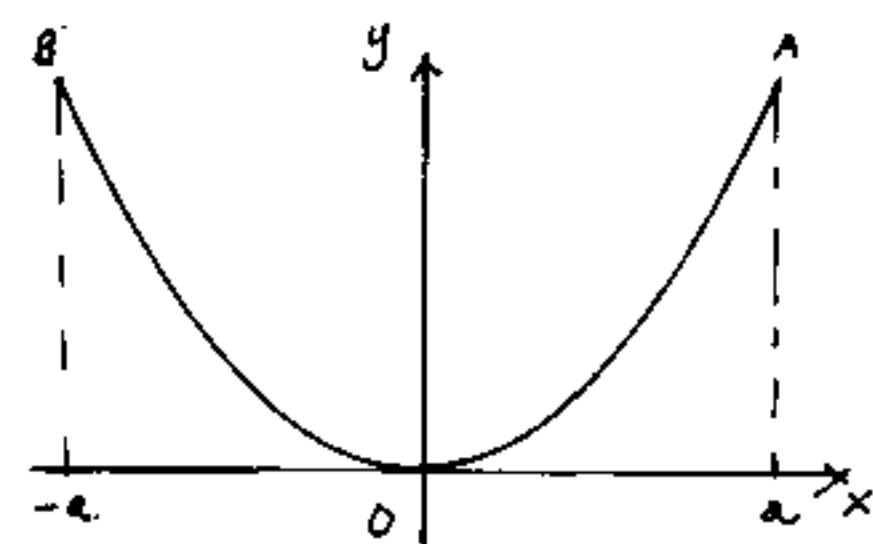


$$S_y = \int_a^b x dl ; S_x = \int_a^b y dl$$

per cui:

$$x_G = \frac{S_y}{L} ; y_G = \frac{S_x}{L}$$

Esempi: baricentro della parabola: $y = mx^2$
(è simmetrica rispetto ad y : $x_G = 0$); $y' = 2mx$



$$dl = \sqrt{1 + 4m^2 x^2} dx$$

$$L_{OA} = \int_0^a \sqrt{1 + 4m^2 x^2} dx$$

$$L_{OB} = \frac{1}{2m} \int_0^a \sqrt{1 + 4m^2 x^2} d(2m)x$$

posto: $2mx = \sinh t$

$$d(2mx) = \cosh t dt ; \sqrt{1 + (2mx)^2} = \cosh t ; L = \frac{1}{2m} \int_0^a \cosh(t) dt$$

$$L = \frac{1}{2m} \left[\frac{\sinh(t) \cosh(t) + t}{2} \right] =$$

$$L = \frac{1}{2m} \left[\frac{2mx \sqrt{1+(2mx)^2} + \operatorname{arcsinh}(2mx)}{2} \right]_0^a$$

$$L = \frac{x}{2} \sqrt{(2mx)^2 + 1} + \frac{\ln |(2mx) + \sqrt{(2mx)^2 + 1}|}{4m}$$

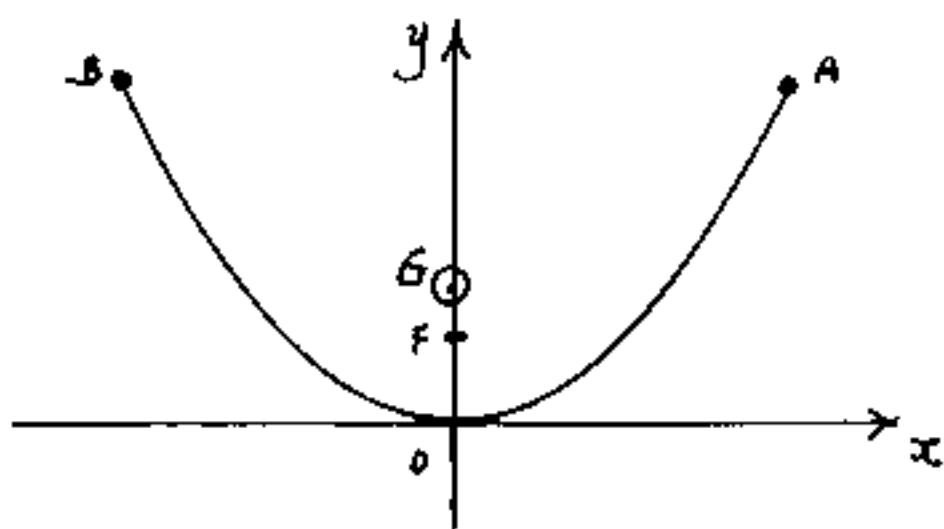
$$\frac{S_x}{\sigma_A} = \int_0^a y \cdot dl = \int_0^a (mx^2) \sqrt{1+(2mx)^2} dx =$$

possiamo ridurre: $\frac{S_x}{\sigma_A} = \frac{1}{12m} x d(1+(2mx)^2)^{3/2}$ ed integrare per parti, oppure sostituire: $(2mx) = \sinh(t)$, in ogni caso si ottiene:

$$S_x = \left(\frac{x}{32m} + \frac{mx^3}{4} \right) \sqrt{1+(2mx)^2} - \frac{\ln |(2mx) + \sqrt{1+(2mx)^2}|}{64m^2}$$

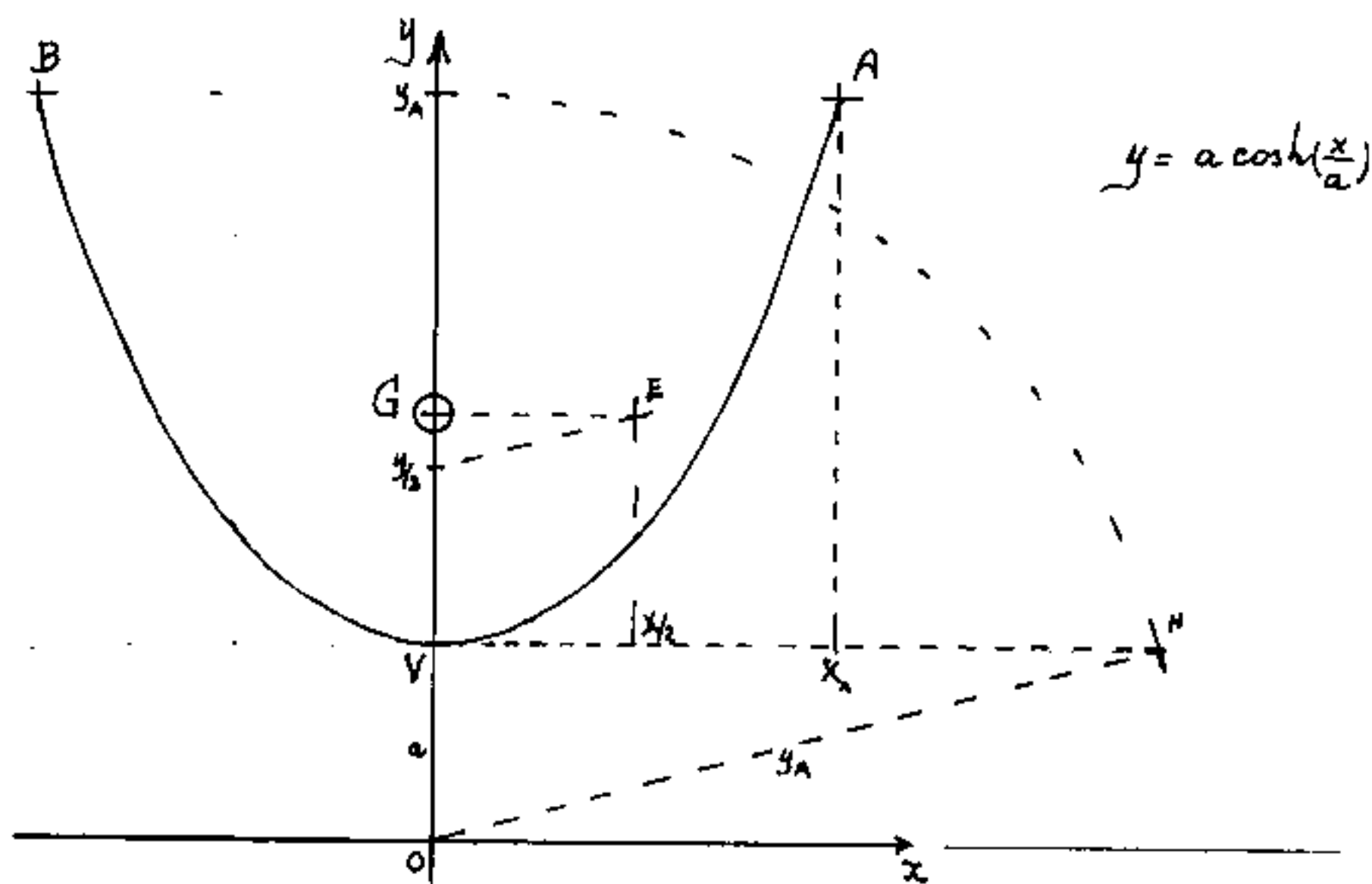
Per $x=1$ ed $m=1$ si ha: $L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln |2+\sqrt{5}| = 1,4789$

$S_b = 0,606337$: $y_G = \frac{S_b}{L} = 0,40998 \approx 0,41$



Baricentro di una catenaria

Sappiamo che la catenaria è la configurazione di equilibrio di una catenella di peso uniforme liberamente sospesa a due punti A e B.



Costruzione grafica

Riportato in $\overline{OH}$ l'ordinata: $y_B = y_A$ abbiamo $\overline{VH} =$ lunghezza L di $\widehat{VA} = \widehat{VB}$ (raddrizzata). Da $y_{1/2}$ la parallela ad $\overline{OH}$ fino ad incontrare in E l'ordinata per $x_{1/2}$ da E la parallela ad x fino a G. (Baricentro di $\widehat{AVB}$).

Calcolo analitico

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{equaz. della catenaria})$$

$$y' = \sinh \frac{x}{a}$$

$$dl = \sqrt{1+y'^2} dx = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad (\text{elemento di lunghezza})$$

$$L = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = (\text{lunghezza di un ramo di ascissa } x)$$

Momento statico rispetto ad x :

$$S_x = \int y dl = \int \left(a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right) \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx\right) = a \int \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)$$

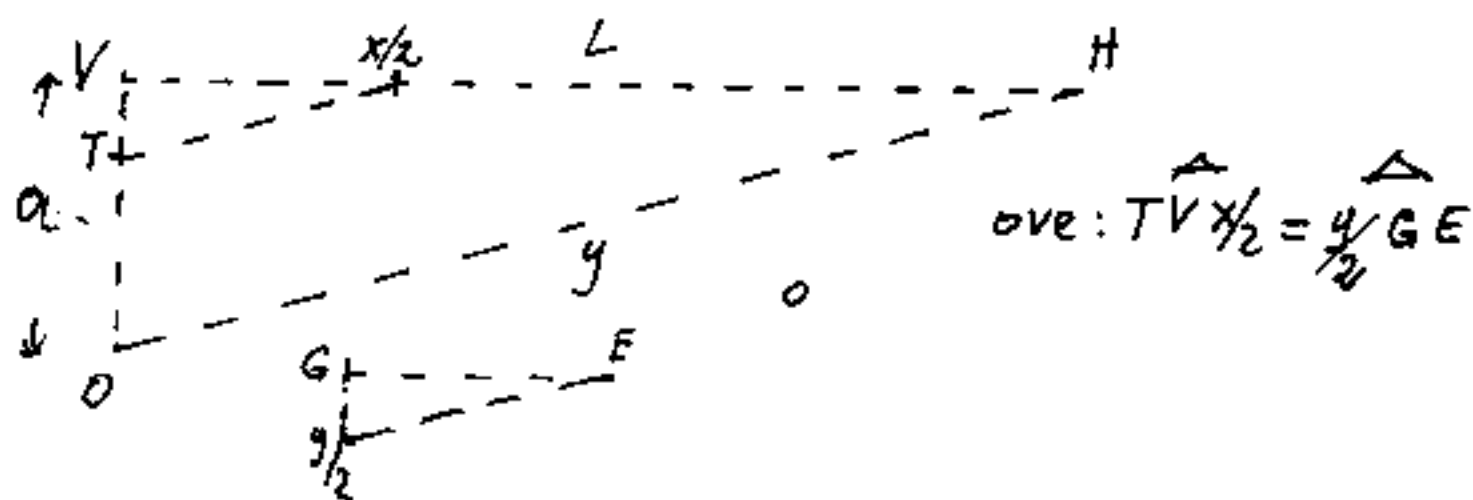
$$S_x = a^2 \left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}}{2} \right)$$

$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{a^2 \left(\sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right) \right) \frac{1}{2}}{a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$y_G = \frac{a}{2} \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{\sinh \frac{x}{a}} \right)$$

$$y_G = \frac{y}{2} + a \frac{x/2}{L}$$

Cioè l'ordinata del baricentro sovrasta metà dell'ordinata degli estremi della grandezza: $a \frac{x/2}{L}$ da cui la costruzione grafica

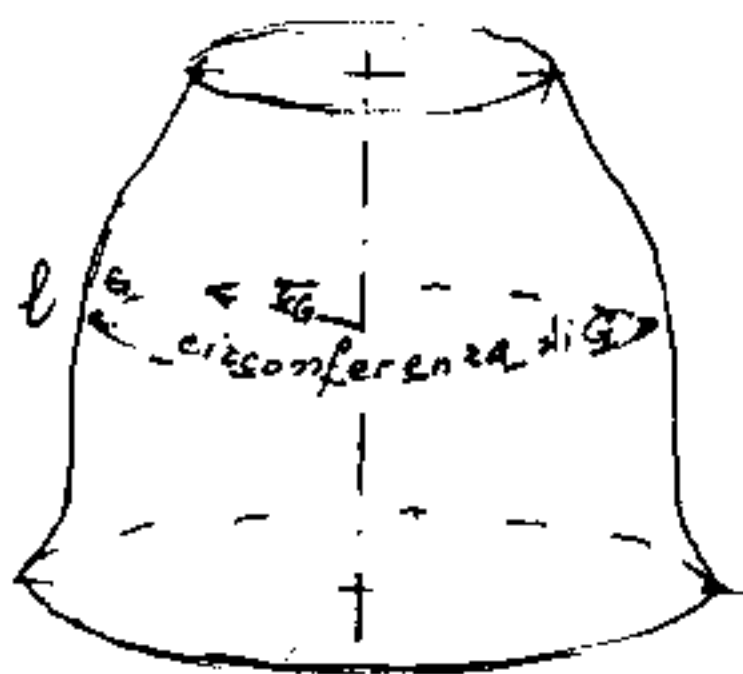


Il volume dei solidi di rotazione

(Teoremi di Pappo e Guldino)

I° Teorema:

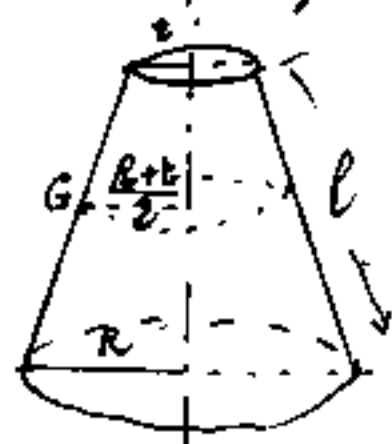
L'area della superficie generata da una linea che ruota intorno ad un asse (complanare) è data dalla lunghezza della linea per la circonferenza descritta dal suo baricentro.



$$S = l \cdot 2\pi r_G$$

Esempi:

I° superficie laterale del tronco di cono.



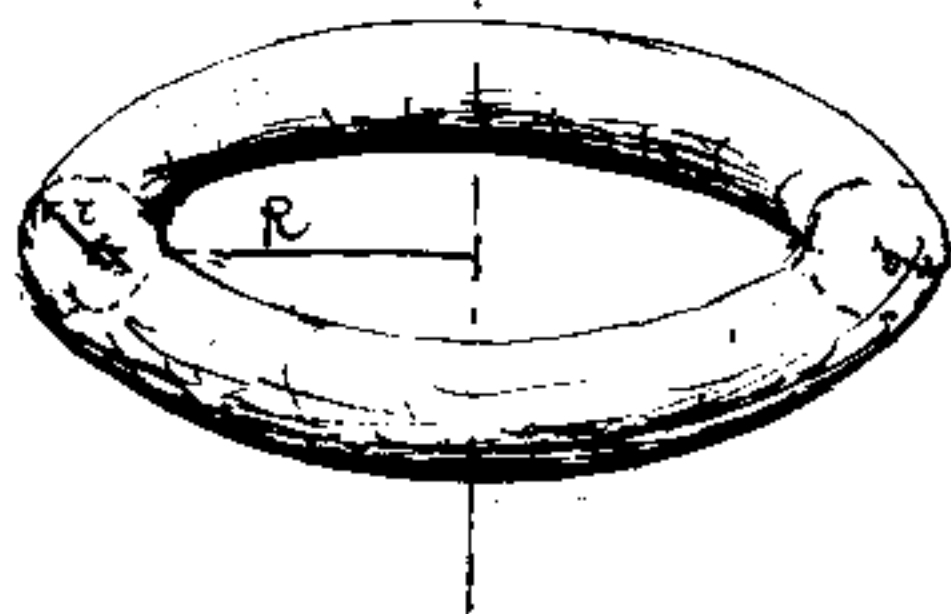
$$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

$$S_l = l \cdot 2\pi \frac{R+r}{2}$$

$$S_l = l(R+r)\pi$$

Se $r=0$ si ha la superficie laterale del cono.
 $S_l = lR\pi$.

1) Superficie torica



$$Sl = (2\pi r)(2\pi R)$$

$$Sl = 4\pi^2 r R$$

2° Teorema:

Il volume generato dall'area di una superficie piana che ruota intorno ad un asse (complanare) è dato dall'area della superficie moltiplicata per la circonferenza descritta dal suo baricentro.

$$V = A \cdot 2\pi r_G$$

Esempi:

1) Volume del toro: $V = (r^2 \pi)(2R\pi)$

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

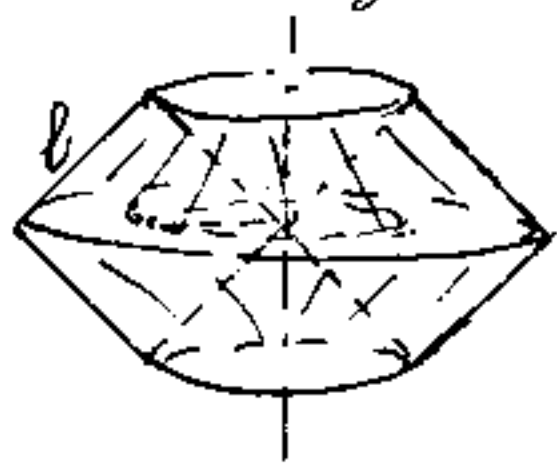
2) Volume del cono generato dal triangolo rettangolo che ruota intorno l'altezza.



$$V = \left(\frac{RL}{2}\right)(2\pi \frac{R}{3})$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

3) Calcolare la superficie laterale ed il volume del solido generato da un quadrato di lato l che ruota intorno ad un asse parallelo ad una diagonale e passante per un vertice del quadrato.



Si sono generati due tronchi di cono affacciati per la base e svuotati di due coni.

$$S_L = (4l) \left(2\pi \frac{l}{2} \sqrt{2} \right) =$$

$$\boxed{S_L = 4l^2 \pi \sqrt{2}}$$

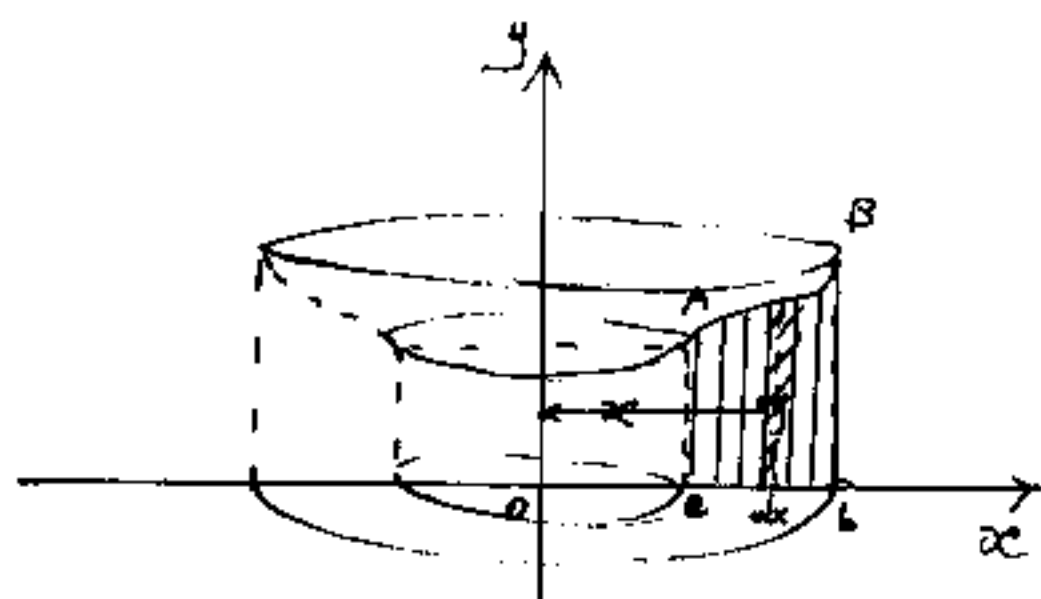
$$V = (l^2) \left(2\pi \frac{l}{2} \sqrt{2} \right) ;$$

$$\boxed{V = l^3 \pi \sqrt{2}}$$

Si noti la snellezza della risoluzione.

Questo secondo teorema ammette una ulteriore semplificazione quando si debba calcolare il volume del solido di rotazione generato dall'area fra la linea $y = f(x)$ ed uno degli assi cartesiani che è anche asse di rotazione.

Consideriamo il tratto di linea A,B e l'area che essa forma con l'asse delle x , avremo: $A = \int_a^b f(x) dx$; e supponiamo di



voler calcolare il volume generato dall'area per una rotazione intorno all'asse y .

Per trovare il raggio della circonferenza descritta dal baricentro che, in questo caso è:

$$R_G = x_c = \frac{S_y}{A}$$

ma il volume è:

$$V = A \cdot 2R_G \pi = \cancel{A} \cdot \frac{S_y 2\pi}{\cancel{A}}$$

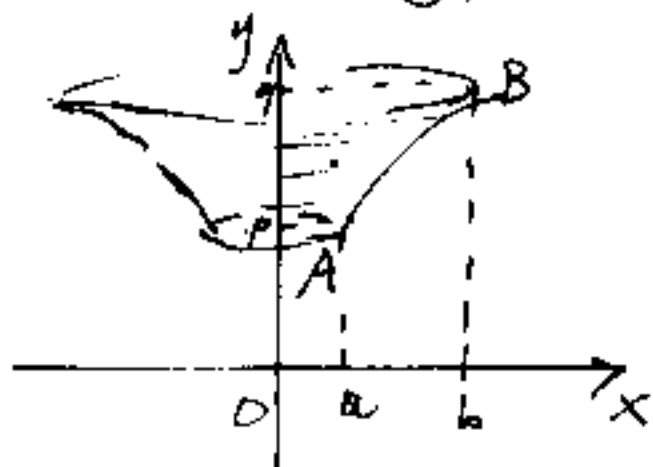
$$\boxed{V = 2S_y \pi}$$

e non occorre calcolare neppure l'area.

Ciò vale anche se l'asse di rotazione è l'asse x infatti:

$$\boxed{V = S_x 2\pi}$$

Qualora l'area sia delimitata dalla curva e dall'asse y , il calcolo dell'area: $A = \int x dy$



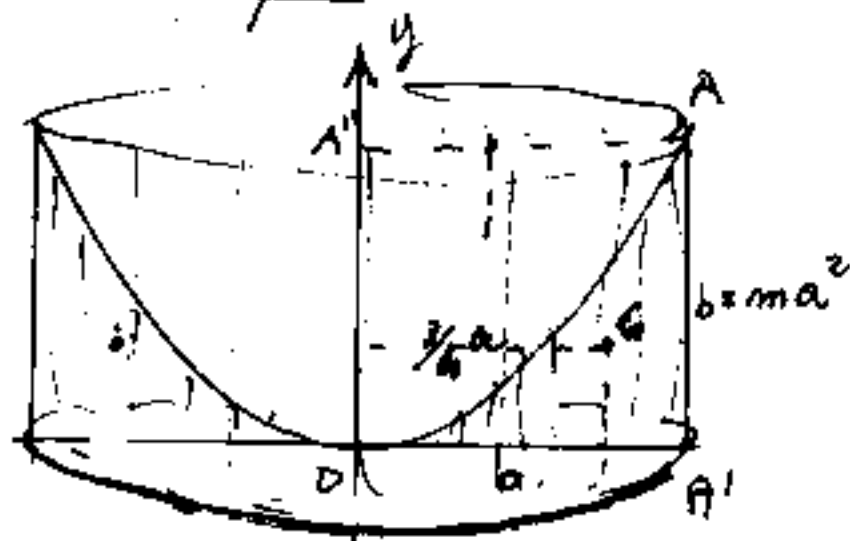
ed il calcolo del momento statico: $S_y^* = \int \frac{x^2}{2} dy$, il volume è ancora:

$$V = S_y^* \cdot 2\pi$$

In generale vale il teorema:

Il volume del solido generato da un'area che ruota intorno ad un asse è dato dal momento statico di quell'area rispetto a quell'asse moltiplicato per 2π .

Esempi



volume del solido generato dal triangolo parabolico $OA'A$ che ruota intorno all'asse y .

$$V = A \cdot 2\pi x_G = \left(\frac{ab}{3}\right) 2\pi \cdot \frac{3}{4}a$$

$$V = \frac{a^2 b \pi}{2}$$

Verifichiamo: $S_y = \int x^2 m dx = \frac{a^2 b}{4}$ per cui: $V = \frac{a^2 b}{4} 2\pi = \frac{a^2 b \pi}{2}$

Il volume della cavità parabolica sarà il volume del cilindro: $a^2 b \pi$ diminuito del volume della parte solida $a^2 b \pi - \frac{a^2 b \pi}{2} = \frac{a^2 b \pi}{2}$ (i due volumi sono uguali) e poiché l'area del triangolo parabolico convesso $AA''O = \frac{2}{3}ab$ avremo che il baricentro $x_G = \frac{\frac{a^2 b \pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}ab} \cdot \frac{1}{2\pi}} = \frac{3}{8}a$.

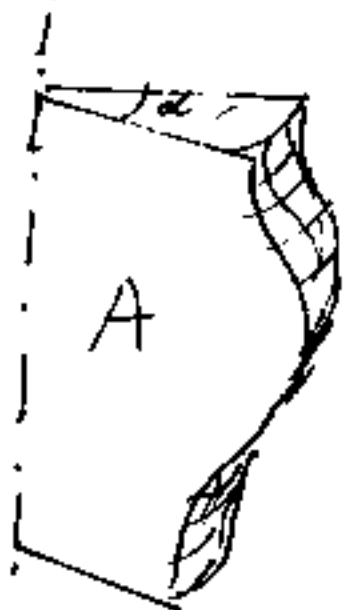
Analogamente si può calcolare $y_G = \frac{3}{5}b$.

Si può dire anche che: "Il momento statico di un'area rispetto ad un asse è il volume generato da quell'area nella rotazione intorno all'asse diviso l'angolo di cui ha ruotato."

Il momento statico sarebbe quindi da riguardare, dimensionalmente, come il prodotto di una massa per una distanza divisa per l'angolo di cui ha ruotato. (cioè per unità di radiante).

Questa affermazione (contraria al parere dei fisici, secondo i quali l'angolo non ha dimensione fisica) sana molte incongruenze della fisica classica, infatti mentre un volume è per es. "cm³" il momento statico di un'area è (cm³/rad); mentre il lavoro di una forza è "Kg.m", il momento di una forza è "Kg.m./rad", e diventa lavoro se il momento ruota di un angolo α rad perché $\frac{\text{Kg.m.}}{\text{rad}} \cdot \text{rad} = \text{Kg.m.}$ Analogamente il momento statico di un'area diventa volume se si moltiplica per l'angolo di cui ha ruotato $\frac{\text{cm}^3}{\text{rad}} \cdot \text{rad} = \text{cm}^3$.

$$\boxed{V = S \cdot \alpha}$$



Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali

Diconsi "equazioni differenziali" quelle espressioni algebriche nelle quali figurano le derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$ della y ; oppure i differenziali dx, dy , ed altri.

Si distinguono in:

- ordinarie - quando le derivate sono funzioni di una sola variabile, (x) .
 - a derivate parziali - quando sono funzioni di più variabili.
-

Equazioni differenziali ordinarie

- Dicesi "Ordine" di una equazione differenziale l'ordine massimo delle derivate che figurano nell'equazione. (se figura solo y' è un'equazione del primo ordine, se figura y'' è del secondo ordine ... e così via)
- Risolvere una equazione differenziale significa trovare una: $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, (cioè una funzione della x e di tante costanti arbitrarie: $c_1, c_2, \dots, c_n$, quant'è l'ordine dell'equazione),

tale che, sostituita con le sue derivate nella equazione data, la soddisfi.

Quindi per verificare se abbiamo trovato una vera risoluzione occorre fare le sostituzioni nell'equazione data, ma il fatto che la verifichi non è condizione sufficiente per affermare che quella risoluzione è generale.

Poiché nell'espressione risolutiva non figurano le derivate, è chiaro che vi saranno stati dei procedimenti di integrazione, dai quali sono scaturite le costanti arbitrarie. Perciò, la risoluzione contenente le costanti arbitrarie è detta:

Integrale generale dell'equazione data; essa rappresenta la famiglia di tutte le possibili funzioni della x ($y = f(x)$) che si ottengono attribuendo valori numerici (arbitrari) alle costanti.

L'espressione risolutiva nella quale abbiamo sostituito dei valori numerici alle costanti è detta:

Integrale particolare e rappresenta: una delle infinite funzioni della famiglia definita dall'integrale generale.

Se la famiglia di curve definite dalle funzioni dell'integrale generale, ammette una:

curva inviluppo: ($y = \varphi(x)$), in questa espressione non figureranno costanti arbitrarie, e verificherà l'equazione differenziale data perché ad ogni punto della curva inviluppo corrisponde un punto di una delle curve della famiglia espressa dall'integrale generale. La: $y = \varphi(x)$ è detta:

Integrale singolare e può anche ricavarsi considerando le $C_1, C_2, \dots, C_n$ come funzioni della x , cioè: $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$.

Facciamo un esempio di "famiglie di linee determinate da un parametro". Per semplicità consideriamo l'equazione: $y = mx + q$; se riguardiamo " m " come "parametro" abbiamo la "famiglia" delle rette passanti per ($x=0; y=q$). Se invece riguardiamo " q " come parametro abbiamo la famiglia di rette parallele inclinate di " m " sulle asisse: $y' = m$; $m = \frac{y-q}{x}$; $y' = \frac{y-q}{x}$ che può scriversi: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-q}{x}$ ed anche (separando

le variabili: $\frac{dy}{y-q} = \frac{dx}{x}$ ed integrando

$\boxed{\ln|y-q| = \ln|x| + C}$ e considerando: $C = \ln|m|$

abbiamo $\ln|y-q| = \ln|mx|$ da cui:

$|y-q| = |mx|$ cioè: $\boxed{y = mx + q}$

Se invece avessimo considerato "q" come parametro, l'equazione differenziale diventa: $y' = m$ cioè: $dy = m dx$, ove integrando si ha: $y = mx + c$ ove: $c = q$.

Abbiamo con ciò cercato di far vedere le correlazioni fra le costanti di integrazione ed i parametri di una famiglia di curve (funzioni).

Come nasce una equazione differenziale?

Si può costruire una equazione differenziale per eliminazione di costanti, cioè data una:

funzione: $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, derivando

n volte: $y' = f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$

$y'' = f''(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$

.....

$y^{(n)} = f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$

Si ha un sistema di $(n+1)$ equazioni nelle "n" incognite $c_1, c_2, \dots, c_n$. per determinare le quali bastano "n" equazioni, trovate quindi: $c_1, c_2, \dots, c_n$ in funzione di $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, si sostituiscono nella $(n+1)$ esima equazione rimanente ottenendo:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

Che è la nostra equazione differenziale ottenuta per eliminazione di costanti arbitrarie.

Da ciò è possibile dimostrare che data una equazione differenziale esiste ed è unico il suo integrale generale dipendente da n costanti arbitrarie.

Come vedremo, i tipi di equazioni differenziali ordinarie, sono molteplici, praticamente infiniti. È assolutamente necessario, prima di iniziare i calcoli, individuare il tipo di equazione.

Il calcolo delle equazioni differenziali ordinarie.

Ricordiamo, prima di tutto, le operazioni elementari del calcolo differenziale:

$y = f(x)$	· differenziando:	$dy = f'(x) dx$
$z = f(x, y)$	"	$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
$z = (x \pm y)$	"	$dz = dx \pm dy$
$z = (x \cdot y)$	"	$dz = y dx + x dy$ (si usa spesso)
$z = \frac{x}{y}$	"	$dz = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$
$z = x^y$	"	$dz = y(x)^{y-1} dx + x^y \ln x dy$
$z = \frac{x+y}{x-y}$	"	$dz = \frac{2x dy - 2y dx}{(x-y)^2}$

$$\begin{array}{ll}
z = \sin(x+y) & \text{differenziando: } dz = (\cos(x+y))(dx + dy) \\
z = f(x \pm y) & \text{" } dz = f'(x \pm y) [dx \pm dy] \\
z = f(x \cdot y) & \text{" } dz = f'(x \cdot y) [y dx + x dy] \\
z = (\varphi(x))(\psi(y)) & \text{" } dz = \varphi'(x)\psi(y)dx + \varphi(x)\psi'(y)dy
\end{array}$$

Per riconoscere se una espressione differenziale è un differenziale esatto, si applica il criterio di Schwarz. Cioè accertiamo se sono uguali le derivate seconde miste; l'espressione da esaminare si presenta nella forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

ove: $P(x,y)$ ed $Q(x,y)$ sono polinomi in x ed y .

noi vogliamo sapere se esiste una $Z = f(x,y)$ tale che:

$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

riguardiamo l'espressione come fosse:

$$d(f(x,y)) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

ove derivando ulteriormente per derivate miste si ha:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \quad (\text{Schwarz})$$

cioè se:

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}} \quad (\text{sono uguali})$$

Noi abbiamo riguardato $P_{(x,y)}$ come fosse la derivata parziale rispetto ad x di una ipotetica $z=f(x,y)$; cioè: $P_{(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial x}$ ed abbiamo riguardato $Q_{(x,y)}$ come fosse la derivata parziale rispetto ad y della stessa per ora ipotetica $z=f(x,y)$; cioè: $Q_{(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial y}$ facendo le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$$

Se le espressioni sono uguali cioè se:

$$\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$$

allora l'espressione: $(P_{(x,y)} dx + Q_{(x,y)} dy)$ è un differenziale esatto ed esiste quindi una funzione $z=f(x,y)$ (detta anche funzione potenziale) tale che il suo integrale dipende solo dai limiti di integrazione:

$$\int_a^b dz = \int_a^b (P_{(x,y)} dx + Q_{(x,y)} dy) = (b-a)$$

I tipi di equazioni differenziali

Equazioni differenziali del primo ordine

Ove: $y' = \frac{dy}{dx}$ è il massimo ordine di derivata che figura nell'equazione.

L'equazione completa è del tipo:

$$f(x, y, y') = Q$$

(ove Q può essere una costante od anche funzione di x, y)

Se $Q=0$ L'equazione è detta omogenea

Se provvisoriamente abbiamo noi posto $Q=0$ l'equazione di cui sopra diventa:

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{ed è detta:}$$

omogenea associata

Poiché per risolvere una equazione differenziale completa è necessario risolvere prima la sua omogenea associata, è importante tipizzare le equazioni differenziali omogenee:

$$f(x, y, y') = 0$$

Equazioni differenziali del I° ordine

Equazioni risolvibili rispetto ad y'

$$y' = F(x, y)$$

possono ridursi alla forma:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

si hanno i seguenti casi:

1) $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ è un differenziale esatto

cioè: $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ (Schwarz) allora si integra:

$$\int_{(ad\ y=const.)} P(x, y) dx + \int_{(ad\ x=const.)} Q(x, y) dy + C = Z = f(x, y).$$

2) $f(x) dx + \varphi(y) dy = 0$ a variabili separabili

ove $f(x)$ è funzione della sola x e $\varphi(y)$ è funzione della sola y , si integra direttamente.

3) $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ a coefficienti omogenei

cioè quando $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono polinomi in x ed in y dello stesso grado si divide per x al massimo grado e si pone: $t = \frac{y}{x}$ in tal modo si riduce a variabili separabili.

4) $y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$ riducibile a coeff. omogenei

in questa forma è riducibile a coefficienti omogenei.

5) $y' + P(x)y = Q(x)$ equazione lineare

ove: $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni della sola x .
 è un importantissimo tipo di equazione differenziale del primo ordine, non omogenea, di cui esiste una facile formula risolutiva, direttamente applicabile, senza fare l'iter di calcolo attraverso l'omogenea associata.

La formula risolutiva è:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{+\int P(x) dx} dx + C \right]$$

ove la: $e^{-\int P(x) dx}$ moltiplica anche la costante C.

6) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ equazione di Bernouilli

essa non è lineare perché al secondo membro figura una potenza della y . Dividendo per y^n e sostituendo: $z = y^{n-1}$; $z' = (n-1)y^{n-2}$ si trasforma in lineare in z .

7) $y' + L(x)y^2 + M(x)y + N(x) = 0$ equaz. di Riccati

ove: $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ sono funzioni della sola x
essa può scriversi:

$y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$ con $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ funzioni della sola x . (Si trasforma in una equazione di Bernouilli.)

Equazioni non risolte rispetto ad y'
ammettono vari tipi:

8) y' ammetta più radici: $y' = f_1(x, y)$; $y' = f_2(x, y)$; ... $y' = f_n(x, y)$:

calcoliamo gli integrali:

$$\int y' - f_1(x, y) = 0 ; \int y' - f_2(x, y) = 0 ; \dots \int y' - f_n(x, y) = 0$$

avremo:

$$F_1(x, y, c_1) ; F_2(x, y, c_2) ; \dots F_n(x, y, c_n) ; \quad e$$

l'integrale generale sarà il prodotto:

$$(F_1(x, y, c_1))(F_2(x, y, c_2)) \dots (F_n(x, y, c_n)) = 0$$

dei singoli integrali.

9) $f(y, y')$ manca x si opera un cambiamento

di variabile ponendo: $y(x) = g(t)$; $y'(x) = \varphi(t)$ ed applichiamo la for-

mula: $x = \int_0^t \frac{g'(t)}{\varphi(t)} dt + c$

10) $f(x, y')$ (manca della y) si pone:

$$x = g(t); \quad y'_{(x)} = \varphi(t); \quad y'_{(t)} dt = y'_{(x)} x'_{(t)} dt = \varphi_{(t)} g'_{(t)} dt$$

$$y = \int_0^t \varphi_{(t)} g'_{(t)} dt + c$$

Equazioni che si integrano con procedimento di derivazione (introducendo un parametro)

11) $y = x f(y') + \varphi(y')$ equaz. di Monge-D'Alembert-Lagrange

Si deriva rispetto ad x e si pone $y' = P$ - con ciò si trasforma in lineare (eliminando P si ha l'integrale generale) (vedi 12)

12) $y = x y' + \varphi(y')$ equazione di Clairaut

Se nell'equazione di Monge all'atto della eliminazione di P con l'equazione data si ha: $P = f(P)$, la formula diventa illusoria. Per esempio:

$y = x \cdot P + \varphi(P)$ che è l'equazione di Clairaut, e che si risolve ponendo la costante arbitraria " C " al posto di " y' " nell'equazione data.

13) $F(x, y, y') = 0$ Equazioni Omogenee (del primo ordine)

14) $P(x) dx + Q(y) dy = 0$ Il fattore integrante [vedi 1), 2), 3)]

I metodi risolutivi

Non seguiremo esattamente l'ordine numerico dei tipi di equazioni proposti, ma cercheremo di procedere iniziando dai casi più semplici, indicando però il numero di riferimento.

2) Equazioni a variabili separabili: $(\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0)$

esempio:

$$\boxed{y' = x \cdot y} \quad \text{si ha: } \frac{dy}{dx} = xy$$

separando le variabili: $\frac{dy}{y} = x dx$

integrando direttamente: $\int \frac{dy}{y} = \int x dx$ cioè

$$\boxed{\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1}$$

Si è raggruppata in C_1 la costante additiva dei due integrali. Se poniamo: $C_1 = \ln|c|$ si ha

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \frac{x^2}{2} \quad \text{si ha: } \boxed{y = C e^{\frac{x^2}{2}}}$$

che è l'integrale generale di $y' = xy$.

per ogni valore numerico di C (per es. $C=5$) si ha
l'integrale particolare: $y = 5e^{x^2/2} = 5\sqrt{e^{x^2}}$.

2) esempio: $\boxed{x \cdot y \cdot y' = 1 - y^2} \Rightarrow \boxed{\frac{y dy}{(1 - y^2)} = \frac{dx}{x}}$

ridotta a variabili separate, integrando:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d(1-y^2)}{(1-y^2)} = \int \frac{dx}{x} \quad \text{da cui:}$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1-y^2| = \ln x + C_1 \quad \text{posto } C_1 = -\ln|C_2|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{C}} \quad ; \quad y^2 = 1 - \frac{C}{x^2}$$

$$\boxed{y = \pm \sqrt{1 - \frac{C}{x^2}}} \quad (\text{integrale generale})$$

Si noti come si possono ottenere espressioni diverse variando l'arbitrarietà di "C"

È molto importante vedere subito se le variabili sono separabili.

1) Equazioni differenziali esatti: $(P_{(x,y)} + Q_{(x,y)} = 0)$

Prima si verifica se è un differenziale esatto, poi si integra direttamente ad $y = \text{cost.}$ in dx ed a $x = \text{cost.}$ in dy .

1) Esempio

$$\boxed{(x+3)dy + (4x^2+y)dx = 0} \quad \text{eq. data}$$

$$\frac{\partial (x+3)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial (4x^2+y)}{\partial y} = 1$$

per Schwarz. essendo uguali possono considerarsi derivate seconde: $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ di

una funzione Z la cui l'espressione data è un differenziale esatto cioè: $Z = f(x, y)$

$$dZ = (x+3)dy + (4x^2+y)dx$$

cioè noi consideriamo

$$(x+3)dy = \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (\text{ad } x = \text{costante})$$

$$(4x^2+y)dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx \quad (\text{ad } y = \text{costante})$$

integrando:

$$\int (x+3)dy = xy + 3y + C(x)$$

Si noti che nella costante di integrazione vi possono essere delle x perdute nella derivata parziale ad $x = \text{cost.}$

$$\int (4x^2+y)dx = \frac{4}{3}x^3 + xy + C(y)$$

anche qui vi possono essere delle y nella costante di integrazione, ma le due primitive delle derivate parziali prime ad $x = \text{cost}$ e a $y = \text{costante}$ debbono essere uguali essendo originariamente la stessa $z = f(x,y)$ perciò:

$$xy + 3y + C(x) = xy + \frac{4}{3}x^3 + C(y)$$

dal confronto si ha:

$$C(x) = \frac{4}{3}x^3 + C, \quad ; \quad C(y) = 3y + C$$

perciò:

$$z = \boxed{\frac{4}{3}x^3 + xy + 3y + C = 0} \quad \text{è l'integrale generale (forma implicita)}$$

dell'equazione data: $\boxed{(x+3)dy + (4x^2+y)dx = 0} = dz$
che si verifica differenziando.

Se explicitiamo la y si ha:

$$\boxed{y = \frac{-(\frac{4}{3}x^3 + C)}{(x+3)}} \quad \begin{array}{l} \text{(integrale generale)} \\ \text{(forma esplicita)} \end{array}$$

verifica: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2(x+3) + (\frac{4}{3}x^3 + C)}{(x+3)^2} = \frac{-4x^2 - y}{(x+3)}$

da cui: $\boxed{(x+3)dy + (4x^2 + y)dx = 0}$

torna l'equazione data.

Se nell'integrale generale poniamo $C=36$

si ha $y = -\frac{4}{3} \left(\frac{x^3 + 3^3}{(x+3)} \right)$: si ha: $\boxed{y = -\frac{4}{3}x^2 + 4x - 12}$

l'integrale particolare con $C=36$ è una

parabola ad asse verticale verso il basso che ha il vertice $V \equiv (+\frac{3}{2}; -9)$ cioè non taglia l'asse delle ascisse.

3) Equazioni differenziali a coefficienti omogenei $(P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy) = 0$

Dopo aver verificato che l'equazione non è un differenziale esatto (Schwarz) e quindi non può risolversi col metodo sovraesposto, ed aver verificato che l'espressione non è a variabili separabili, di cui abbiamo già visto il metodo risolutivo, verificato che i due

polinomi $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sono dello stesso grado
 e quindi che l'equazione può definirsi a coeffi-
cienti omogenei, si divide per x al massimo expo-
 nente, si sostituisce: $\frac{y}{x} = t$; $\frac{y^2}{x^2} = t^2$; ... $\frac{y^n}{x^n} = t^n$;
 $dy = (x dt + t dx)$ e l'equazione diventa a va-
 riabili separabili.

3) Esempio:

$$(x+y) dx + (y-x) dy = 0$$

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial(y-x)}{\partial x} = -1$$

non è un differenziale esatto.

divido per x

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx + \left(\frac{y}{x} - 1\right) dy = 0$$

sostituisco $t = \frac{y}{x}$; $dy = (x dt + t dx)$

$$dx + \cancel{t dx} + t x dt + t^2 dx - x dt - \cancel{t dx} = 0$$

$$(1+t^2) dx + (t-1)x dt = 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right) dx + \left(\frac{(t-1)}{(t^2+1)}\right) dt = 0 \quad \text{ridotta a variabili separabili.}$$

integrando:

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|t^2+1| - \arctg(t) + C_1 = 0 \quad ; \quad (C_1 = \ln C)$$

$$\ln|C \cdot x \cdot \sqrt{t^2+1}| = \arctg(t)$$

$$\ln|C \sqrt{y^2+x^2}| = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{e^{\arctg(\frac{y}{x})} = C \sqrt{y^2+x^2}} \quad (\text{integrale generale})$$

4) Equazione riducibile a coefficienti omogenei: $y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

4) Esempio: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{x-2y+3}{4x+5y-1}\right)$

Sappiamo che aggiungere o togliere costanti ad un fattore differenziale questo non cambia perciò facciamo una traslazione di assi ponendo

$$X = x + \alpha \quad ; \quad Y = y + \beta \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(Y + \beta)}{d(X + \alpha)}$$

scegliamo α e β in modo che:

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \quad ; \quad a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

cioe':

$$\left. \begin{aligned} \alpha - 2\beta + 3 &= 0 \\ 4\alpha + 5\beta - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{rcl} -4\alpha + 8\beta + 12 &= & 0 \\ \underline{4\alpha + 5\beta - 1 = 0} && \\ \beta &= & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 5\alpha - 10\beta + 15 &= & 0 \\ \underline{8\alpha + 10\beta - 2 = 0} && \\ \alpha &= & -1 \end{array}$$

sostituendo:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi \left(\frac{x-1-2(y+1)+3}{4(x-1)+5(y+1)-1} \right) = \varphi \left(\frac{x-2y}{4x+5y} \right)$$

L'espressione è omogenea, quindi posto $t = \frac{y}{x}$

si ha: $dy = x dt + t dx \equiv dx \cdot \varphi\left(\frac{1-2t}{4+5t}\right)$

$$\frac{dt}{p\left(\frac{1-2t}{4+5t}\right)-t} = \frac{dx}{x} \quad (\text{a variabili separate})$$

è ridotta a variabili separate, ma la φ (è una funzione di grado zero rispetto ad x ed y) può rendere complessa l'integrazione.

5) Equazioni differenziali lineari

Diconsi lineari quelle equazioni in cui la y e le sue derivate hanno esponente 1.

Questa importante classe di equazioni differenziali, per il primo ordine, si presenta nella forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni note della x .

In quanto l'equazione non è uguagliata a zero, (figura $Q(x)$), non è una equazione omogenea, pertanto per risolverla occorrerà considerare l'omogenea associata:

$$y' + P(x)y = 0$$

Risolta la quale: $(\frac{dy}{y} = -P(x)dx)$; si impone che verifichi $Q(x)$ si ottiene l'integrale generale:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{+\int P(x)dx} dx + C \right)$$

formula che può applicarsi direttamente

senza fare tutti i passaggi attraverso l'omogenea associata, tenendo presente che $e^{-\int P(x)dx}$ moltiplica anche la costante C .

Vediamo, per completezza, come è stata ricavata la formula risolutiva.

Risolviamo l'omogenea associata:

$$y' + P(x)y = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad , \quad \ln|y| = -\int P(x)dx + c_1$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int P(x)dx$$

$$\boxed{y_0 = ce^{-\int P(x)dx}} \quad \text{integrale dell'omogenea associata}$$

Se poniamo $\boxed{y = (u \cdot v)}$ abbiamo $\boxed{y' = u'v + uv'}$ (ove u e v sono funzioni della x).

Data l'arbitrarietà di u e v a cui si è imposta la sola condizione: $\boxed{u \cdot v = y}$, per determinare u e v occorre un'altra condizione a cui debbono sottostare (anche questa arbitraria) noi porremo: $\boxed{v' + vP(x) = 0}$ (ove v tiene il posto di y_0 nell'omogenea associata, per cui: $\boxed{v = ce^{-\int P(x)dx}}$)

Sostituiamo ora nella equazione data la y' e la y avremo:

$$\boxed{(u'v + v'u) + uv(P(x)) = Q(x)}$$

che possiamo scrivere:

$$u'v + u(v' + vP(x)) = Q(x)$$

$$\text{ma: } (v' + vP(x) = 0) \quad \text{per cui} \quad \boxed{u' = Q(x)/v}$$

$$\int u' = (v)^{-1} \cdot Q(x) = \int \left(ce^{-\int P(x)dx} \right)^{-1} Q(x) = \left(\int Q(x) e^{+\int P(x)dx} + c \right)$$

sostituendo nella $y = U \cdot V$ si ha (raggruppando la costante arbitraria di integrazione)

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{+\int P(x) dx} dx + C \right)$$

5) Esempio

$$y' + ay = e^{mx}$$

applicando la formula

$$y = e^{-\int a dx} \left(\int (e^{mx}) \cdot e^{+\int a dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{-ax} \left(\int e^{(m+a)x} dx + C \right)$$

$$y = e^{-ax} \left(\frac{e^{(m+a)x}}{m+a} + C \right)$$

$$y = \frac{e^{mx}}{m+a} + \frac{C}{e^{ax}}$$

integrale generale.

Verifichiamo:

$$y' = \frac{m}{m+a} e^{mx} - a C e^{-ax}$$

sommando:

$$ay = \frac{a}{m+a} e^{mx} + a C e^{-ax}$$

$$y' + ay = e^{mx}$$

(torna l'eq. data)

Questo tipo di equazioni ci ha portato a risolvere eq. diff. non omogenee. Si noti però che $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni delle sole x .

si noti che le equazioni a variabili separabili, o differenziali esatti, od a coefficienti omogenei, non sono in genere lineari.

6) Equazione di Bernouilli $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

figura la potenza y^n che moltiplica $Q(x)$ (non è lineare) però con opportune trasformazioni e cambiamenti di variabile può ridursi a lineare.

Infatti dividendo per y^n l'equazione diventa:

$$y' \cdot y^{-n} + P(x) y^{1-n} = Q(x)$$

posto: $z = y^{1-n}$; $z' = (1-n) y^{-n} y'$; $\frac{z'}{(1-n)} = y' y^{-n}$

sostituendo e moltiplicando per $(1-n)$ si ha:

e l'equazione $z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ (lineare)

applicando la formula risolutiva dell'equazioni lineari si ha:

$$z = \left\{ e^{-(1-n)\int P(x)dx} \left(\int (1-n)Q(x) e^{+(1-n)\int P(x)dx} + C \right) \right\}$$

ma: $y = z^{\frac{1}{1-n}}$

$$y = \left\{ e^{-(1-n)\int P(x)dx} \left((1-n) \int Q(x) e^{+(1-n)\int P(x)dx} \cdot dx + C \right) \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

Integrale generale applicabile direttamente.

6) Esempio:

eq. data:

$$y' + (\cot g(x))y = (\sqrt{\sec x}) y^{3/2}$$

$n = 3/2$ (frazionario) $(1-n) = -1/2$;

applicando la formula risolutiva:

$$e^{-(1-n) \int P(x) dx} = e^{\frac{1}{2} \int \cot g x dx} = e^{\frac{1}{2} \ln |\sec x|} = e^{\ln \sqrt{\sec x}} = \sqrt{\sec x}$$

$$y = \left\{ \sqrt{\sec x} \left(-\frac{1}{2} \int \sqrt{\sec x} \frac{1}{\sqrt{\sec x}} dx + c \right) \right\}^{1/(-1/2)}$$

$$y = \left\{ \sqrt{\sec x} \left(-\frac{x}{2} + c \right) \right\}^{-2}$$

$$y = \frac{1}{\sec x \left(-\frac{x}{2} + c \right)^2}$$

integrale generale
dell'equazione data

Verifica:

$$y' = \frac{-\cos x}{\sec^2 x} \frac{1}{\left(-\frac{x}{2} + c \right)^2} + \frac{1}{(\sec x) \left(-\frac{x}{2} + c \right)^3} \cdot (-x) \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$y' = \left(\frac{1}{\sec x \left(-\frac{x}{2} + c \right)^2} \right) \left(-\cot g(x) + \frac{1}{\left(-\frac{x}{2} + c \right)} \right)$$

$$y' = y \left(-\cot g(x) + \frac{1}{\left(-\frac{x}{2} + c \right)} \right)$$

$$y' + y \cot g(x) = \frac{1}{\sec x \left(-\frac{x}{2} + c \right)^3}$$

$$\left[\sqrt{\sec x} \right] y^{3/2} = \left(\sqrt{\sec x} \right) \frac{1}{(\sec x)^{3/2} \left(-\frac{x}{2} + c \right)^{3/2}} = \frac{1}{\sec x \left(-\frac{x}{2} + c \right)^3}$$

cioè:

$$y' + y \cot g x = (\sqrt{\sec x}) y^{3/2}$$

(turna)

7) Equazioni differenziali di Riccati

è equaz. $y' + P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) = 0$ data

Non è lineare, (y^2), non è omogenea. $P(x), Q(x), R(x)$ sono funzioni della sola x .

Per risolvere questo tipo di equazioni è necessario trovare un integrale particolare che indichiamo con y_0 (l'integrale particolare non ha le costanti arbitrarie). Sostituendo y_0 nella equazione data: $y_0' + P(x)y_0 + Q(x)y_0^2 + R(x) = 0$

Sottraendo termine a termine dalla equazione data e ponendo: $t = (y - y_0)$ $y = (t + y_0)$; $(y + y_0) = t + 2y_0$

$$t' + P(x)t + Q(x)(y - y_0)(y + y_0) = 0 = t' + P(x)t + Q(x)t(t + 2y_0) = 0$$

infine: $t' + (P(x) + 2y_0 Q(x))t = -Q(x)t^2$

L'equazione risulta così trasformata in una equazione di Bernoulli con $(n=2)$, perciò applicando la formula si ha:

$$t = \left[e^{\int (P(x) + 2y_0 Q(x)) dx} \left((-1) \int Q(x) e^{-\int (P(x) + 2y_0 Q(x)) dx} dx + C \right) \right]^{(-1)}$$

$y = t + y_0$ Occorre sapere come si possono trovare integrali particolari (y_0), o in quali casi sono noti a priori.

Se invece poniamo: $y = y_0 + \frac{1}{z}$ che equivale a $t = \frac{1}{z}$ si ha l'equazione lineare:

$$z' - (2Q(x)y_0 + P(x))z = Q(x)$$

applicando la formula:

$$z = e^{\int (2Q(x)y_0 + P(x)) dx} \left[\int Q(x) e^{-\int (2Q(x)y_0 + P(x)) dx} dx + C \right]$$

se z_1 e z_2 sono due integrali particolari:

$$z = \frac{1}{y - y_0} ; z_1 = \frac{1}{y_1 - y_0} ; z_2 = \frac{1}{y_2 - y_0}$$

Il fatto che, risolvendo una equazione lineare, la costante arbitraria moltiplica una funzione $\varphi(x)$ cioè: $y = C \varphi(x) + \psi(x)$ è l'integrale generale e quindi un generico integrale particolare sarà del tipo: $y_i = C_i \varphi(x) + \psi(x)$ ed anche: $y - y_i = (C - C_i) \varphi(x)$ e quindi dividendo per $y - y_1$; $y_2 - y_1$ si ha: $i = 0, 1, 2$

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = \frac{(C - C_0) \cancel{\varphi(x)}}{(C - C_1) \cancel{\varphi(x)}} ; \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{C_2 - C_0}{C_2 - C_1}$$

$$\text{quindi } \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_1} : \frac{y - y_0}{y - y_1} = \text{cost.}, (y_0, y_1, y_2, y) = \text{cost.}$$

Il birapporto di quattro integrali particolari è costante (nell'eq. di Riccati) per cui se sono noti tre integrali particolari la equazione di Riccati si integra risolvendo y nel birapporto di cui sopra.

Equazioni differenziali del primo ordine non risolte rispetto alla derivata prima

8) y' ammetta più radici $f(y', y, x) = 0$

risolvendo rispetto ad y' si ottengano n risoluzioni (radici) $y'_1 = \varphi_1(x, y)$; $y'_2 = \varphi_2(x, y)$; $\dots$ $y'_n = \varphi_n(x, y)$.
ciascuna di queste radici avrà il suo integrale generale del tipo:

$$F_1(x, y, c_1) ; F_2(x, y, c_2) ; \dots F_n(x, y, c_n)$$

Cio' premesso chiameremo integrale generale dell'equazione data una espressione che comprenda tutti gli integrali generali delle singole risoluzioni.

8) Esempio $y'^2 - a^2 x^2 = 0$

$$y'_1 = +ax ; y'_2 = -ax ; y_1 = \frac{ax^2}{2} + c_1 ; y_2 = -\frac{ax^2}{2} + c_2$$

$$\left(y - \left(\frac{ax^2}{2} \right) - c_1 \right) \left(y + \frac{ax^2}{2} - c_2 \right) = 0$$

Integrale generale dell'equazione data.

Prive di una delle due variabili

Sono del tipo: $f(y, y') = 0$; $f(x, y') = 0$

Abbiamo già avuto occasione d'incontrare entrambe le equazioni in esempi che, caso per caso, abbiamo risolto. Ora vogliamo generalizzare.

9) Equazioni prive della x

$$f(y, y') = 0$$

Sia: $y = g(t)$; $\frac{dy}{dx} = y'_{(x)} = \varphi(t)$ una risoluzione dell'
equazione espressa parametricamente in t .
cerchiamo anche l'equazione di x espressa para-
metricamente in t .

Se $t = \alpha$ è una radice dell'equazione: $\varphi(t) = 0$, la
retta dell'equazione: $y = y_{(\alpha)}$ è una curva integrale
dell'equazione data. Per altri valori di " t " in
un intervallo in cui $\varphi(t) \neq 0$; $dy = g'_{(t)} dt$, ma:
 $dy = \varphi_{(t)} dx$ per cui:

$$dx = \frac{g'_{(t)}}{\varphi_{(t)}} dt$$

$$x = \int_{t_0}^t \frac{g'_{(t)}}{\varphi_{(t)}} dt$$

ed $y = g(t)$ sono le equazioni parametriche
in t che risolvono il problema.

9) Esempio:

$$y'^3 - yy' + y = 0$$

poniamo: $y_{(t)} = y'_{(t)} = t$ da cui sostituendo e risolvendo in y si ha:

$$y = \left(\frac{t^3}{t-1} \right) = (g(t))$$

derivando:

$$g'(t) = \frac{3t^2(t-1) - t^3}{(t-1)^2} dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{(t-1)^2} dt$$

essendo:

$$dx = \frac{g'(t)}{y} dt \quad dx = \frac{2t^3 - 3t^2}{t(t-1)^2} dt$$

$$dx = \frac{2t^2 - 3t}{(t-1)^2} dt$$

$$dx = \frac{2(t^2 - 2t + 1) + t - 2}{(t-1)^2} dt = dx = \frac{2(t-1)^2 + (t-1) - 1}{(t-1)^2} dt$$

$$x = 2 \int dt + \int \frac{dt}{(t-1)} - \int \frac{dt}{(t-1)^2} =$$

$$x = 2t + \ln|t-1| + \frac{1}{(t-1)} + C$$

$$y = \frac{t^3}{(t-1)}$$

Sono le equazioni parametriche dell'integrale generale dell'equazione data

10) Equazioni prive della y $\boxed{f(x, y') = 0}$

Analogamente al caso precedente si cerca di esprimere l'integrale generale mediante funzioni parametriche in t . cioè: $\boxed{x = p(t)}$; $\boxed{y = q(t)}$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \varphi(t) : dx = p'(t) dt \quad dy = \varphi(t) dt = q'(t) dt$$

$$dy = \varphi_t dx = \varphi_t p'_t dt$$

$$\boxed{q(t) = y = \int_{t_0}^t \varphi_t p'_t dt.}$$

10) Esempio: $\boxed{y'^3 + xy' + x = 0}$ (analogo al precedente)

$$y' = \varphi(t) = t \quad \text{da cui} \quad \boxed{x = \frac{t^3}{t-1}}$$

$$dx = \frac{3t^2(t-1) - t^3}{(t-1)^2} dt = dy = \varphi \cdot \frac{dx}{dt} = t \frac{2t^3 - 3t^2}{(t-1)^2} dt$$

$$dy = \frac{2t^4 - 3t^3}{(t-1)^2} dt = \frac{(2t^2 + t)(t^2 - 2t + 1) - t + 1 - 1}{(t-1)^2} =$$

$$dy = \left((2t^2 + t) - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt$$

integrando:

$$\boxed{y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} - \ln|t-1| + \frac{1}{t-1} + C}$$

$$\boxed{x = \frac{t^3}{t-1}}$$

Equazioni parametriche in t dell'integrale generale dell'equazione data

Equazioni che si integrano con procedimento di derivazione (introducendo un parametro)

Data l'equazione: $y = f(x, y')$ esplicitata in y
supponiamo nota: $y'_{(x)} = (P_{(x)})$ avremo:

$$y = f(x, P_{(x)})$$

$$dy = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial P_{(x)}} dP$$

cioè:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \boxed{P_{(x)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P} \frac{dP}{dx}}$$

ove sia possibile integrare questa equazione avremo che il suo integrale generale sarà: $\boxed{F(x, P, c) = 0}$
eliminando P con la $y = f(x, P)$ avremo l'integrale in y .

Esempio: $\boxed{y = y'^2 - x y' + \frac{x^2}{2}}$ posto $y' = P = \frac{dy}{dx}$

avremo: $\boxed{y = (P^2 - xP + \frac{x^2}{2})}$ derivando

$$dy = (x - P) dx + (P - x) dP$$

$$\frac{dy}{dx} = x - P + (P - x) \frac{dP}{dx} = P$$

$$(2P - x) dP = (P - x) dx \quad \boxed{P = x + C}$$

sostituendo:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2}$$

$$y = (x^2 + 2Cx + C^2 - x^2 - Cx + \frac{x^2}{2})$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2}$$

soluzione generale

4) Equazione di Monge-D'Alembert-Lagrange

L'equazione: $y = x \varphi(y') + \psi(y')$ da alcuni detta "di Monge", da altri "di D'Alembert"-Lagrange" ed altri ancora semplicemente: "di Lagrange".

rientra nel tipo: $y = f(x, y')$, ora trattato con procedimento di derivazione, ponendo: $y' = P$.

si arriva a:

$$P = \varphi_{(P)} + (x \varphi'_{(P)} + \psi'_{(P)}) \frac{dP}{dx}$$

Supposto: $(P - \varphi_{(P)}) \neq 0$ (altrimenti l'eq. è detta di Clairaut)

abbiamo l'equazione lineare in x (attenzione!)
in x

$$(P - \varphi_{(P)}) \frac{dx}{dP} = x \varphi'_{(P)} + \psi'_{(P)}$$

$$\frac{dx}{dP} - \frac{\varphi'_{(P)}}{(P - \varphi_{(P)})} x = \frac{\psi'_{(P)}}{(P - \varphi_{(P)})}$$

integrando (con la formula che conosciamo) si ha:

$$x = e^{+\int \frac{\varphi'_{(P)} dP}{(P - \varphi_{(P)})}} \left[\int e^{-\int \frac{\varphi'_{(P)} dP}{(P - \varphi_{(P)})}} \left(\frac{\psi'_{(P)}}{(P - \varphi_{(P)})} \right) dP + C \right] = F(P, C)$$

L'integrale generale si ottiene eliminando P

con l'equazione: $y = x \varphi_{(P)} + \psi_{(P)}$

Sia α una radice dell'eq. $(P - \varphi_{(P)}) = 0$ (Posta da noi = zero)

cioè se $(\alpha - \varphi_{(\alpha)}) = 0$, (con $\alpha = \text{cost.}$) cioè $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ avremo,

(sostituendo) gli integrali singolari: $y = \varphi_{(\alpha)} + \psi_{\alpha}$

che sono rette.

11) Esempio : $y = y'^2 + xy' + x$

$(y' = P)$

$$y = P^2 + (P+1)x$$

$$dy = (2P + x) dP + (P+1) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = P = (2P + x) \frac{dP}{dx} + (P+1)$$

$$-(2P + x) = \frac{dx}{dP} \quad (x' + (1)x = -2P)$$

$$x = e^{-\int dP} \left[\int e^{\int dP} (-2P) dP + C \right]$$

$$x = e^{-P} \left[-\int e^P (2P) dP + C \right] = -e^{-P} [2Pe^P - 2e^P + C]$$

$$x = -2(P-1) + Ce^{-P}$$

sostituendo nella $y = P^2 + (P+1)x$

$$y = P^2 - 2(P^2 - 1) + Ce^{-P}(P+1)$$

$$y = -P^2 + 2 + Ce^{-P}(P+1)$$

$$x = -P + \frac{C}{e^P} + 2$$

$$y = -P^2 + \frac{C(P+1)}{e^P} + 2$$

} Sistema di equazioni
parametriche in P

costituiscono l'integrale generale dell'equazione
data. —

12) Equazione di Clairaut. $y = xy' + \psi(y')$

ove, rispetto all'equazione precedente: $\varphi(p) = P = y'$

Posto, al solito $y' = P$ si ha: $y = P \cdot x + \psi(P)$

differentiando $P = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial(Px + \psi(P))}{\partial x} + \frac{\partial(Px + \psi(P))}{\partial P} \frac{dP}{dx}$

$$P = P + (x + \psi'(P)) \frac{dP}{dx}$$

$$(x + \psi'(P)) \frac{dP}{dx} = 0$$

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

cioè: $P = C$ = costante e gli integrali saranno:

$$y = Cx + \psi(C)$$

cioè delle rette.

12) Esempio:

$$y = x \cdot y' + \arctg(y')$$

Posto: $y' = P$

$$y = P \cdot x + \arctg P \quad P = P + \left(x + \left(\frac{1}{1+P^2}\right)\right) \frac{dP}{dx}$$

$$y = Cx + \arctg C \quad \text{integrale generale}$$

Se avessimo preso come eq data $y = y'x + y'$

avremmo avuto l'equazione: $y = Cx + C$ cioè

$y = C(x+1)$ che la famiglia di rette passanti per il punto $(x=-1); (y=0)$.

Le equazioni differenziali omogenee

Prima di affrontare l'argomento riportiamo
Il teorema di Eulero (vedi anche funzioni omogenee)

Consideriamo l'espressione:

$$F(t) = \frac{f(tx_1 + tx_2 + \dots + tx_n)}{t^m} = \frac{f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{t^m}$$

derivando rispetto a t :

$$F'_t = \frac{1}{t^m} \left[f_{x_1}(u_1, u_2, \dots, u_n) x_1 + \dots + f_{x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) x_n \right] - \frac{m}{t^{m+1}} f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$F'_t = \frac{1}{t^{m+1}} \left[f_{x_1}(u_1, u_2, \dots, u_n) u_1 + \dots + f_{x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) u_n - m f(u_1, u_2, \dots, u_n) \right]$$

ma per l'identità di Eulero $F'_t = 0$, cioè: $F_t = C =$
 $= (\text{costante})$, cioè:

$$\frac{f(tx_1 + tx_2 + \dots + tx_n)}{t^m} = C = (\text{costante})$$

per $t=1$

$$\frac{f(tx_1 + tx_2 + \dots + tx_n)}{t^m} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C = \text{cost.}$$

sostituendo (data l'arbitrarietà della costante)

ritorna:

$$\boxed{f(tx_1 + tx_2 + \dots + tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

ciò vuol dire che:

Tutte le funzioni omogenee positive

di grado m , sono integrali dell'equazione

alle derivate parziali (Teorema di Eulero)

14) Il fattore integrante

Torniamo ad equazioni del tipo:

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$$

qualora l'espressione non sia un differenziale esatto cioè: $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

Poiché l'espressione, essendo uguagliata a zero, può essere moltiplicata per un fattore qualsiasi, senza che cambi; ci domandiamo se esiste un fattore $F(x,y)$ tale che rendo l'espressione un differenziale esatto.

Tale fattore detto: fattore integrante, esiste sempre, anzi ne esistono infiniti, trovato uno, si può trovare la formula che li comprenda tutti.

Infatti: $\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$, dovrà essere: $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$.

poniamo: $\mu = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{P(x,y)} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{Q(x,y)}$ avremo:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P(x,y)$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q(x,y)$ per cui:

$$\mu P(x,y) dx + \mu Q(x,y) dy = 0$$

diventa:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

(μ dovrà essere tale da soddisfare la condizione di Schwarz)

Facciamo alcuni esempi:

Per trovare il fattore integrante si accerta se

$$\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) \frac{1}{Q(x,y)} = F(x) \text{ allora } \mu = \mu(x)$$

$$\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) \frac{1}{P(x,y)} = F(y) \quad \text{ " } \mu = \mu(y)$$

14) Esempio : $\boxed{(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) dx + (x^2 + y^2) dy = 0}$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = (2x + x^2 + y^2) ; \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$$\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) \frac{1}{Q(x,y)} = \left[(2x + x^2 + y^2) - (2x) \right] \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 1 \quad (*)$$

quindi: $\mu = \mu(x)$

poiché deve essere: $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ cioè: $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + Q \frac{d\mu}{dx} \quad \text{avremo:}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = dx ; \ln|\mu| = x ; \boxed{\mu = e^x}$$

avremo:

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

che è il differenziale di $\boxed{ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) - e = 0}$

differenziando con la regola del prodotto

$$\left[ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) + ye^x(2x) \right] dx + \left[e^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) + ye^x \frac{2y}{3} \right] dy = 0$$

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x(2x + x^2 + y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2) + e^x(2x).$$

Esempio:

$$(x + y^2) dx - (2xy) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \quad (\text{diverso il segno})$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{1}{2xy} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x} \quad \text{cioè } \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} ; \quad \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{d\mu}{dx} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2 dx}{x} ; \quad \ln|\mu| = \ln \frac{1}{x^2} ; \quad \boxed{\mu = \frac{1}{x^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) dx - \left(2 \frac{y}{x} \right) dy = 0}$$

è il differenziale di:

$$\boxed{\ln|x| - \left(\frac{y^2}{x} \right) + C = 0}$$

Il fatto di poter decidere se μ è solo funzione della x o solo funzione della y , ne facilita la determinazione perché: $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$

In generale se: $\mu_{(x,y)}$ è un fattore integrante dell'equazione, il suo integrale generale $\mu(x,y)$ è ancora un fattore integrante dell'equazione stessa, perciò se conosciamo due fattori integranti $u_{(x,y)}$ e $v_{(x,y)}$ avremo che $\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = C$ è l'integrale generale.

Equazioni omogenee del primo ordine

Abbiamo già trattato un caso particolare di equazioni differenziali omogenee cioè con la x e la y dello stesso grado: "m" nei coefficienti $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ rispettivamente di dx e dy e che abbiamo chiamato a coefficienti omogenei.

Consideriamo ora l'equazione:

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}$$

che per essere omogenea di grado m rispetto ad x ed a y può scriversi:

$$\boxed{F(\gamma x, \gamma y, y') = \gamma^m F(x, y, y')}$$

dividendo per x al massimo esponente "m" avremo:

$$F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = \frac{F(x, y, y')}{x^m}$$

e ponendo $\frac{y}{x} = t$. (come abbiamo fatto per le equazioni a coefficienti omogenei) la funzione diventa: $P(t, y') = 0$ e se possiamo risolverla rispetto ad $y' = \frac{dy}{dx}$ si riduce a coefficienti omogenei. Ma se y' non è esplicitabile, poniamo

$$t = \frac{y}{x} = g(t) \quad y'_{(x)} = \varphi(t)$$

differenziando:

$$y = x g(t)$$

abbiamo:

$$dy = x g'(t) dt + g(t) dx$$

ed anche:

$$dy = y'_{(x)} dx = \varphi(t) dx$$

confrontando i due dy si ha:

$$(g(t) - \varphi(t)) dx + x g'(t) dt = 0$$

nella quale è possibile separare le variabili:

$$\frac{dx}{x} + \frac{g'(t)}{(g(t) - \varphi(t))} dt = 0$$

per cui:

$$x = C e^{\int \frac{g'(t)}{(g(t) - \varphi(t))} dt} \quad \text{ed anche}$$

$$y = C(g(t)) e^{\int \frac{g'(t)}{(g(t) - \varphi(t))} dt}$$

Esempio

$$(x+y)y' = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$(t = \frac{y}{x})$$

$$y' = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{(1+t)} \quad dy = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{(1+t)} dx$$

differenziando: $y = tx$ si ha: $dy = t dx + x dt$

confrontando i due dy :

$$t dx + x dt = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{(1+t)} dx$$

$$x dt = \left(\frac{\operatorname{arctg} t}{(1+t)} - t \right) dx$$

$$\ln x = \int \frac{(1+t)}{\operatorname{arctg}(t) - t - t^2} dt + C.$$

$$x = C e^{\int \frac{(1+t) dt}{\operatorname{arctg}(t) - t - t^2}}$$

$$y = C \cdot t e^{\int \frac{(1+t)}{\operatorname{arctg}(t) - t - t^2} dt}$$

Equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo

Il tipo più generale delle equazioni differenziali di ordine n con variabile indipendente x e dipendente y è:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

il cui integrale generale sarà del tipo:

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

se la y è esplicitabile o

$$\Psi(y, x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

ove la y è funzione della x e di " n " costanti arbitrarie " C ". (la y può anche essere considerata un derivata di ordine zero, in tal senso se P_i è funzione della x : $\sum_{i=0}^n P_i y^{(i)} = 0$ è una equazione differenziale lineare perché le derivate non hanno esponenti, omogenea perché uguagliata a zero la Σ . (non sarebbe omogenea se fosse $= Q(x)$)

Procediamo con ordine tipizzando le varie equazioni differenziali, iniziando da equazioni facilmente quadrabili.

$$y^{(n)} = f(x)$$

L'integrale è:

$$y = \left[\int \int \dots \int^{(n)} f(x) dx^n \right] + C_1(x^{n-1}) + C_2(x^{n-2}) + \dots + C_{n-1}(x) + C_n$$

Esempio: $y''' = \sec(x)$

$$y'' = -\cos(x) + C_1''$$

$$y' = -\sin(x) + C_1'x + C_2'$$

$$(C_1 = C_1'/2) \quad y = \cos(x) + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

Ad equazioni di questo tipo sono riducibili quelle espressioni risolubili in $y^{(n)} = f(x)$

Esempio:

$$(x)(y''')^2 - (x^2+1)(y''') + x = 0$$

$$y''' = \frac{(x^2+1) \pm \sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}}{2x}$$

$$y''' = \frac{(x^2+1) \pm (x^2-1)}{2x} \quad \begin{cases} = x = y_1''' \\ = \frac{1}{x} = y_2''' \end{cases}$$

$$y_1'' = \frac{1}{2}x^2 + C_1'' ; \quad y_1' = \frac{1}{6}x^3 + C_1'x + C_2' ; \quad \boxed{y_1 = \frac{1}{24}x^4 + C_1x^2 + C_2x + C_3}$$

$$y_2'' = \ln|x| + C_1'' ; \quad y_2' = x \ln|x| - x + C_1'x = y_2' = x \ln|x| + C_1x + C_2$$

$$y_2 = (x^2 \ln|x| + x) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{2}(x^2 \ln|x|) + C_1x^2 + C_2x + C_3}$$

Come si vede le due radici di y''' portano a due integrali generali abbastanza diversi pur mantenendo la forma dell'espressione.

Equazioni differenziali lineari omogenee

I determinanti Wronskiani

È questa una classe di equazioni differenziali particolarmente interessante, del tipo:

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$$

Ove: $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0$, sono funzioni della x .

Qualora i " P_i " fossero costanti: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, l'equazione viene detta: a coefficienti costanti.

Qualora il polinomio sia uguagliato a $Q(x)$, od anche costante, si riduce l'equazione non omogenea a questa classe come "omogenea associata".

Questi tipi di equazione saranno trattati nel seguito.

Per la nostra equazione, se: $y_1, y_2, \dots, y_K$, sono K integrali particolari, ciascuno di essi verificherà l'equazione data.

Poiché l'equazione è uguagliata a zero, moltiplicandola per una costante C non muta. Cioè anche se gli integrali particolari sono moltiplicati per costanti arbitrarie " C_i ", verificano ugualmente la equazione.

Infine anche:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_K y_K$$

sarà un integrale che verificherà l'equazione

Qualora $K = n$ avremo:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n} \quad \text{che è}$$

un integrale che verificherà l'equazione di ordine n ; e poiché dipende da n costanti arbitrarie, ci domandiamo se per caso non sia l'integrale generale o, quali condizioni richiede per esserlo:

Derivando $(n-1)$ volte l'espressione:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

abbiamo:

$$C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' = 0$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n'' = 0$$

$$C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = 0$$

In questo sistema lineare omogeneo riguardiamo le C come incognite e scriviamo il determinante dei coefficienti; che simboleggeremo con la lettera W ed è chiamato:

Determinante Wronskiano. cioè:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Condizione necessaria perché il sistema lineare omogeneo di cui sopra, ammetta soluzioni e che sia identicamente nullo il suo determinante Wronskiano ($W=0$). Ma l'essere nullo il determinante Wronskiano implica anche che le n funzioni: $y_1, y_2, \dots, y_n$, siano linearmente dipendenti (nel campo in cui tali funzioni sono finite e continue)

Le n funzioni: $y_1, y_2, \dots, y_n$, non sono linearmente indipendenti se esiste fra esse una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti (non tutti nulli) ($W=0$) cioè esiste:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

cioè è possibile determinare n costanti $C_1, C_2, \dots, C_n$ non tutte nulle che la verifichino, non è invece possibile determinare tali costanti se le $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono fra loro indipendenti ($W \neq 0$).

Quindi il determinante Wronskiano serve ad indicare se le $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono o meno indipendenti

$$W = \begin{cases} = 0 \rightarrow (\text{dipendenti}) \text{ esiste } (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0) \\ \neq 0 \rightarrow (\text{indipendenti}) \text{ non \u00e9 possibile trovare le } n \text{ costanti,} \\ \text{che verifichino } (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0) \end{cases}$$

Regola di derivazione di un determinante (applicazione al Wronskiano)

Si abbia un determinante rappresentato dallo sviluppo simbolico:

$$D = \sum \pm a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3} \dots a_{ni_n}$$

ove le a_{ik} sono funzioni derivabili della x , derivando abbiamo:

$$D' = \sum \pm a'_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ni_n} + \sum \pm a_{1i_1} a'_{2i_2} \dots a_{ni_n} + \dots + \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a'_{ni_n}$$

quindi:

"La derivata di un determinante \u00e9 data dalla somma dei determinanti ottenuti derivando successivamente la prima, la seconda, ...
... l' n^{ma} riga (colonna)"

Applichiamo questa regola al determinante Wronskiano; notiamo che derivando la I riga diventa uguale alla seconda (per righe uguali

determinante nullo). Se deriviamo la seconda riga, questa diventa uguale alla terza, e così via salvo l'ultima riga. Quindi tutti i determinanti della sommatoria che esprimono D' sono nulli salvo l'ultimo.

cioè per derivare un determinante Wronskiano, basta derivare la sua ultima riga. (mancherà la riga della derivata $(n-1)$) ed il determinante sarà:

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Si può dire che; se nel campo (a,b) si ha: $W=0$ e la matrice M ottenuta sopprimendo l'ultima riga al determinante W' ha, (per ogni punto di (a,b)), caratteristica $(n-1)$ allora le n funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono linearmente legate ed esistono n costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ (non tutte nulle) per cui si abbia:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

Data l'arbitrarietà delle costanti di integrazione abbiamo che, affinché l'espressione:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

sia l'integrale generale dell'equazione:

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$$

è necessario che il loro Wronskiano sia diverso da zero: $(W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0)$ in ogni punto del campo (a, b) .

Cioè le: $y_1, y_2, \dots, y_n$ (integrali particolari) devono essere linearmente indipendenti

Esempio: di una equazione differenziale di terzo ordine, si conoscono gli integrali particolari $y_1 = x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = x^3$.
Per vedere se una espressione del tipo: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ è un integrale generale facciamo il Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} +1 \cdot 3 \cdot x^3 + 0 + 2x^3 \\ -0 - 6x^3 - 6x^3 \end{Bmatrix} = 2x^3 \neq 0$$

(indipendenti)

è un integrale generale.

Possiamo imporre condizioni per risolvere le costanti: $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$ e trovare soluzioni particolari. (per es. per $x=1$; $y=0$; $y'=-1$; $y''=2$), abbiamo:

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 \rightarrow C_1 + 2C_2 + 3C_3 = -1$$

$$y'' = 0 + 2C_2 + 6C_3 x \rightarrow 0 \quad 2C_2 + 6C_3 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} +12 + 0 + 2 \\ 0 - 6 - 6 \end{array} = +2$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + 6 - 2 \\ -4 \quad 0 + 6 \end{array} = +6 \quad C_1 = \frac{6}{2} = +3$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 + 0 + 2 \\ 0 - 6 \quad 0 \end{array} = -10 \quad C_2 = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 0 + 0 \\ 0 + 2 - 2 \end{array} = 4 \quad C_3 = \frac{4}{2} = 2$$

cioè:

integrale particolare: $y = 3x - 5x^2 + 2x^3$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \quad C_1 = 1 \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad C_3 = 0 \\ y_2 \quad C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 1 \quad ; \quad C_3 = 0 \\ y_3 \quad C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad C_3 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{integrali} \\ \text{particolari} \\ \text{noti} \end{array}$$

Sistema fondamentale di integrali di una equazione differenziale lineare omogenea

Formula di Liouville

Si abbia l'equazione:

$$F(y) = f_{(n)} y^{(n)} + f_{(n-1)} y^{(n-1)} + f_{(n-2)} y^{(n-2)} + \dots + f_{(2)} y'' + f_{(1)} y' + f_{(0)} y = 0$$

con $f_{(0)}, f_{(1)}, \dots, f_{(n)}$ funzioni continue in un intervallo: (a, b)

È possibile costruire, in un intorno di x_0 in (a, b) , n integrali particolari: $y_1, y_2, \dots, y_n$ dell'equazione data, che siano linearmente indipendenti.

Consideriamo infatti un qualsiasi determinante di ordine n , a termini costanti, diverso da zero:

$$D = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

possiamo uguagliare l'integrale: $y_{i(x_0)} = K_{1i}$; $y'_{i(x_0)} = K_{2i}$; $\dots$; $y_{i(x_0)}^{(n-1)} = K_{ni}$. Poiché D corrisponde al Wronskiano $\neq 0$ gli n integrali sono linearmente indipendenti.

È possibile dimostrare che: $W' = - \frac{f_{(n-1)}}{f_{(n)}} W$ da cui integrando si ha la notevole formula di Liouville:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{f_{(n-1)}}{f_{(n)}} dx}$$

dalla quale avendosi $W(x_0) \neq 0$ segue $W(x) \neq 0$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Consideriamo inizialmente le equazioni lineari
omogenee a coefficienti costanti.

Queste equazioni del tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

indipendentemente dall'ordine dell'equazione,
si risolvono tutte sostituendo l'ordine delle derivate con esponenti su una nuova incognita z che in tal modo formerà la cosiddetta equazione caratteristica

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ sono le radici, diverse fra loro, reali o complesse della equaz. caratteristica avremo:

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}$$

che è l'integrale generale.

Se nel polinomio vi sono radici uguali
per esempio: μ radici uguali così che l'eq. caratteristica possa scriversi:

$$(z - \alpha)^\mu (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots = 0$$

avremo che il corrispondente integrale generale

diventa:

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + C_4 x e^{\alpha_4 x} + C_5 x^2 e^{\alpha_5 x} + \dots C_n x^{n-1} e^{\alpha_n x}$$

Nel caso di equazioni del primo ordine

$$ay' + by = 0 \quad (\text{eq. diff. data})$$

$$az + b = 0 \quad (\text{eq. caratteristica})$$

$$z = -b/a \text{ per cui: } \boxed{y = C \cdot e^{-\frac{b}{a}x}} \quad (\text{integrale generale})$$

$$\text{derivando: } y' = C \left(-\frac{b}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{cioè:}$$

$$ay' = (-b)(C e^{-\frac{b}{a}x}) = -by \quad \text{quindi:}$$

$$\underline{ay' + by = 0} \quad \text{che verifica la risoluzione.}$$

Nel caso di: equazione differenziale, lineare, omogenea, a coefficienti costanti, del secondo ordine, in generale si ha:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad \text{eq. diff. data}$$

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0} \quad \text{eq. caratteristica}$$

$$\boxed{\alpha_1 \setminus \alpha_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \begin{array}{l} \text{radici della} \\ \text{eq. caratteristica} \end{array}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}} \quad \text{integrale generale}$$

Se le radici sono reali e diverse l'integrale generale resta: $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$.

Se le radici sono reali ed uguali l'integrale generale diventa: (quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$)

$$y = C_1 e^{\alpha x} + x C_2 e^{\alpha x}$$

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}}$$

integrale
generale

Se le radici sono complesse: $\alpha_1 = \tau + iq$; $\alpha_2 = \tau - iq$;
l'integrale generale diventa:

$$\boxed{y = C_{1_0} e^{(\tau+iq)x} + C_{2_0} e^{(\tau-iq)x}}$$

abbiamo indicizzato con zero le due costanti iniziali C_{1_0} e C_{2_0} per trasformarle.

$$y = e^{\tau x} (C_{1_0} e^{iqx} + C_{2_0} e^{-iqx})$$

poniamo: $C_{1_0} = \frac{C_1 + C_2/i}{2}$; $C_{2_0} = \frac{C_1 - C_2/i}{2}$

sostituendo abbiamo:

$$y = e^{\tau x} \left(\frac{C_1 e^{iqx}}{2} + \frac{C_2 e^{iqx}}{2i} + \frac{C_1 e^{-iqx}}{2} - \frac{C_2 e^{-iqx}}{2i} \right)$$

$$y = e^{\tau x} \left(C_1 \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2} + C_2 \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i} \right)$$

ricordando la trigonometria complessa:

$$\boxed{y = e^{\tau x} [C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)]}$$

Esempi: 1) $\boxed{y'' - 7y' + 12y = 0}$ (eq. data)

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \quad (\text{eq. caratteristica})$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 \setminus \\ \alpha_2 / \end{matrix} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \begin{matrix} / = \frac{7}{2} = 4 \\ \setminus = \frac{6}{2} = 3 \end{matrix}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}} \quad (\text{integrale generale})$$

2) $\boxed{y'' - 6y' + 9 = 0}$ (eq. data)

$$z^2 - 6z + 9 = 0 \quad (\text{eq. caratteristica})$$

$$(z-3)^2 = 0 \quad z_1 = z_2 = +3$$

$$y = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x}$$

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}} \quad (\text{integrale generale})$$

3) $\boxed{y'' - 4y' + 6,25y = 0}$ (eq. data)

$$z^2 - 4z + 6,25 = 0 \quad (\text{eq. caratteristica})$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 \setminus \\ \alpha_2 / \end{matrix} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 25}}{2} = \begin{matrix} (2 + \frac{3}{2}i) \\ (2 - \frac{3}{2}i) \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \alpha_1 \setminus \\ \alpha_2 / \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{radici} \\ \text{complesse} \end{matrix}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{(2 + \frac{3}{2}i)x} + C_2 e^{(2 - \frac{3}{2}i)x}}$$

$$\boxed{y = e^{2x} \left(C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x \right)} \quad (\text{integrale generale})$$

Possiamo verificare i risultati derivando successivamente gli integrali generali

верифици:

$$1) y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x} ; y' = 4C_1 e^{4x} + 3C_2 e^{3x} ; y'' = 16C_1 e^{4x} + 9C_2 e^{3x}$$

$$y'' = 16C_1 e^{4x} + 9C_2 e^{3x}$$

$$-7y' = -28C_1 e^{4x} - 21C_2 e^{3x}$$

$$12y = 12C_1 e^{4x} + 12C_2 e^{3x}$$

$$y'' - 7y' + 12y = \frac{0}{0} \quad (\text{тожд.})$$

$$2) y = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x} ; y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3x C_2 e^{3x} ;$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 9x C_2 e^{3x}$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 6C_2 e^{3x} + 9C_2 x e^{3x}$$

$$-6y' = -18C_1 e^{3x} - 6C_2 e^{3x} - 18C_2 x e^{3x}$$

$$9y = 9C_1 e^{3x} + 9C_2 x e^{3x}$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (\text{тожд.})$$

$$3) y = e^{2x} \left(C_1 \cos \frac{3}{2} x + C_2 \sin \frac{3}{2} x \right) ;$$

$$y' = 2e^{2x} \left(C_1 \cos \frac{3}{2} x + C_2 \sin \frac{3}{2} x \right) + e^{2x} \left(-\frac{3}{2} C_2 \sin \frac{3}{2} x + \frac{3}{2} C_1 \cos \frac{3}{2} x \right)$$

$$y' = e^{2x} \left(\frac{7}{2} C_1 \cos \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} C_2 \sin \frac{3}{2} x \right)$$

$$y'' = 2e^{2x} \left(\frac{7}{2} C_1 \cos \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} C_2 \sin \frac{3}{2} x \right) + e^{2x} \left(-\frac{3}{4} C_1 \sin \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} C_2 \cos \frac{3}{2} x \right)$$

$$y'' = e^{2x} \left(\frac{31}{4} C_1 \cos \frac{3}{2} x - \frac{17}{4} C_2 \sin \frac{3}{2} x \right)$$

$$y'' = e^{2x} \left(\frac{31}{4} C_1 \cos \frac{3}{2} x - \frac{17}{4} C_2 \sin \frac{3}{2} x \right)$$

$$-4y' = e^{2x} \left(-\frac{56}{4} C_1 \cos \frac{3}{2} x - \frac{8}{4} C_2 \sin \frac{3}{2} x \right)$$

$$6,25y = +\frac{25}{4}y = e^{2x} \left(\frac{25}{4} C_1 \cos \frac{3}{2} x + \frac{25}{4} C_2 \sin \frac{3}{2} x \right)$$

$$y'' - 4y' + 6,25y = 0 \quad (\text{тожд.})$$

Equazioni lineari omogenee, a coefficienti costanti, del secondo ordine, mancanti di y' , (cioè del tipo $y'' \pm \mu^2 y = 0$)

L'equazione caratteristica:

$$Z^2 \pm \mu^2 = 0 \quad (\mu = \text{costante})$$

da cui: $Z = \pm \mu$ oppure: $Z = \pm i\mu$

i) nel caso di:

$$\boxed{y'' - \mu^2 y = 0} \quad \text{si ha:}$$

$$y = C_1 e^{+\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

posto: $C_1 = \frac{(\alpha + \beta)}{2}$; $C_2 = \frac{(\alpha - \beta)}{2}$; $(C_1, C_2, \text{arbitrarie})$

$$y = \frac{1}{2} (\alpha e^{\mu x} + \beta e^{\mu x} + \alpha e^{-\mu x} - \beta e^{-\mu x})$$

$$y = \alpha \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2} + \beta \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$$

$$\boxed{y = \alpha \cosh(\mu x) + \beta \sinh(\mu x)}$$

ii) nel caso di:

$$\boxed{y'' + \mu^2 y = 0} \quad \text{si ha:}$$

$$y = C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}$$

Ponendo: $\frac{K i \sin \varphi + K \cos \varphi}{2} = c_1$; $\frac{K \cos \varphi - K i \sin \varphi}{2} = c_2$

si ha:

$$y = \frac{1}{2} (K i \sin \varphi e^{i\mu x} + K \cos \varphi e^{i\mu x} - K i \sin \varphi e^{-i\mu x} + K \cos \varphi e^{-i\mu x})$$

$$y = K \frac{e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}}{2} \cos \varphi + K \frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2} i \sin \varphi \quad (i^2 = -1)$$

$$y = K \cos(\mu x) \cos \varphi - K \frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i} \frac{i \sin \varphi}{i}$$

$$y = K (\cos \mu x \cos \varphi - \sin \mu x \sin \varphi)$$

$$\boxed{y = K \cos(\mu x + \varphi)}$$

ove K e φ sono costanti arbitrarie.

3) nel caso generale:

$$\boxed{y'' - Sy' + Py = 0} \rightarrow z^2 - Sz + P = 0$$

Le radici: ρ_1 e $\rho_2 = \frac{+S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$

I) $\Delta = 0 \rightarrow \rho_1 = \rho_2$ per cui: $\boxed{y = e^{\frac{S}{2}x} (c_1 + c_2 x)}$

II) $\Delta > 0 \rightarrow \rho_1 \neq \rho_2$ (reali) $\rightarrow \boxed{y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}}$

III) $\Delta < 0 \rightarrow i\rho_1; i\rho_2 \rightarrow (c_1 e^{i\rho_1 x} + c_2 e^{i\rho_2 x}) = y =$

$$y = e^{-\frac{S}{2}x} (c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x) = \boxed{y = K e^{\frac{S}{2}x} (\cos \mu x + \varphi)}$$

Equazioni differenziali, lineari omogenee, a coefficienti costanti, di ordine "n" (qualsiasi)

Vale per l'equazione caratteristica quanto esposto per le equazioni di grado n ; cioè, se " n " è dispari si ha almeno una radice reale, mentre le eventuali radici complesse vanno a coppie di due radici complesse coniugate, e quindi riducibili a seno e coseno nell'integrale generale. Le radici reali, doppie in valore assoluto ($\pm \mu$), abbiamo visto che possono ridursi a seno e coseno iperbolico nell'integrale generale.

Nel caso di radici multiple: $(z - \alpha)^n = 0$,
l'integrale generale sarà:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + C_3 x^2 e^{\alpha x} + \dots + C_n x^{n-1} e^{\alpha x}$$

che può scripersi:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1})$$

Ma l'equazione caratteristica di grado n ,
supponiamo abbia μ_1 radici $= \alpha_1$; μ_2 radici $= \alpha_2$;
 μ_3 radici $= \alpha_3$ μ_k radici $= \alpha_k$.

$$\text{ove: } \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k = n \right)$$

avremo il sistema:

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 x} (1, x, x^2, \dots, x^{\mu-1}) \\ e^{\alpha_2 x} (1, x, x^2, \dots, x^{\mu-1}) \\ \dots \\ e^{\alpha_k x} (1, x, x^2, \dots, x^{\mu-1}) \end{cases}$$

che è meglio scrivere:

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, x^2 e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha_1 x} \\ e^{\alpha_2 x}, x e^{\alpha_2 x}, x^2 e^{\alpha_2 x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha_2 x} \\ \dots \\ e^{\alpha_k x}, x e^{\alpha_k x}, x^2 e^{\alpha_k x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha_k x} \end{cases}$$

poiché è possibile dimostrare che le μ funzioni:

$$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}$$

danno μ integrali particolari (linearmente indipendenti) dell'equazione:

$$F_y = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Le n funzioni linearmente indipendenti del sistema sopra scritto, formano il sistema fondamentale dell'equazione stessa.

Cio' vale anche se i coefficienti " a " costanti,
sono numeri complessi.

Esempi di radici multiple

1) $\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$ (equazione data.)

$$Z^2 + 4Z + 4 = 0 \quad (\text{equazione caratteristica})$$

cioè: $(Z+2)^2 = 0$ $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = -2}$

$$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$$

ed anche:

$$\boxed{y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)} \quad (\text{integrale generale})$$

verifichiamo derivando:

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x}$$

$$y'' = +4C_1 e^{-2x} - 2C_2 e^{-2x} - 2C_2 e^{-2x} + 4C_2 x e^{-2x}$$

$$y'' = 4C_1 e^{-2x} - 4C_2 e^{-2x} + 4C_2 x e^{-2x}$$

Sostituiamo nell'equazione data:

$$0 = \cancel{4e^{-2x}} (C_1 - C_2 + C_2 x) + \cancel{4e^{-2x}} (-2C_1 + C_2 - 2C_2 x) + \cancel{4e^{-2x}} (C_1 + C_2 x)$$

semplificando risulta verificata.

2) $\boxed{y''' - 15y'' + 75y' - 125y = 0}$ (equazione data)

$$Z^3 - 15Z^2 + 75Z - 125 = 0 = (Z-5)^3 \quad (\text{equaz. caratteristica})$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = +5$$

$$\boxed{y = e^{+5x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)} \quad (\text{integrale generale})$$

che può verificarsi derivando.

$$3) \boxed{y''' - 12y'' + 49y' - 58y = 0} \quad (\text{equaz. data})$$

$$\boxed{z^3 - 12z^2 + 49z - 58 = 0} \quad (\text{equaz. caratteristica})$$

$$\text{di radici: } \boxed{z_1 = +2} ; \boxed{z_2 = 5+2i} ; \boxed{z_3 = 5-2i}$$

porta ad un integrale generale:

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2^{(5+2i)x} + C_3^{(5-2i)x}}$$

che, per quanto già detto, può scriversi: (pag. 480)

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + e^{5x} (C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x))}$$

$$4) \boxed{y''' - y'' - 4y' + 4 = 0} \quad (\text{equazione data})$$

$$\boxed{z^3 - z^2 - 4z + 4 = 0} \quad (\text{equaz. caratteristica})$$

$$\text{di radici: } \boxed{z_1 = 1} ; \boxed{z_2 = 2} ; \boxed{z_3 = -2}$$

porta all'integrale generale:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{+2x} + C_3 e^{-2x}}$$

che, per quanto già detto, può scriversi:

$$(\text{pag. 483}) \quad \boxed{y = C_1 e^x + \alpha \cosh(2x) + \beta \sinh(2x)}$$

Cioè le coppie di radici complesse coniugate, si trasformano in seno e coseno circolare, le coppie di radici reali uguali ed opposte si trasformano in seno e coseno iperbolico.

La risoluzione completa delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x)$$

Risolta l'omogenea associata, ottenuta ponendo $Q(x) = 0$, si presentano vari metodi per risolvere l'equazione data.

1) Se conosciamo un integrale particolare: y_p della equazione data, l'integrale generale è dato dalla somma dell'integrale y_0 dell'omogenea associata e dell'integrale particolare; cioè:

$$y = y_0 + y_p \quad (\text{Liouville})$$

Purtroppo mentre la risoluzione della omogenea associata non presenta problemi e troviamo y_0 , l'integrale particolare y_p in genere non lo conosciamo, però può essere utile fare qualche tentativo per vedere se possiamo trovarlo, altrimenti useremo altri metodi per esempio col metodo di Lagrange delle variazioni delle costanti arbitrarie.

Esempio:

Sia: $y'' + a^2 y = 2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)$ l'eq. data

L'omogenea associata non presenta difficoltà:

$$\alpha = \pm ia \rightarrow y_0 = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$$

Il nostro:

$$Q(x) = 2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)$$

un integrale particolare potrebbe essere dello stesso tipo: $y_p = \alpha \cos(mx) + \beta \sin(mx)$

verifichiamo derivando:

$$y_p' = -m\alpha \sin(mx) + m\beta \cos(mx)$$

$$y_p'' = -m^2\alpha \cos(mx) - m^2\beta \sin(mx)$$

sostituiamo nell'equazione data:

$$(-m^2\alpha \cos(mx) - m^2\beta \sin(mx)) + a^2(\alpha \cos(mx) + \beta \sin(mx)) = Q(x)$$

raggruppando: e riportando $Q(x)$

$$(-m^2\alpha + a^2\alpha) \cos(mx) + (-m^2\beta + a^2\beta) \sin(mx) = 2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)$$

$$(a^2 - m^2)\alpha = 2$$

$$(a^2 - m^2)\beta = 3$$

E' andata bene, per cui l'integrale particolare è:

$$y_p = \frac{2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)}{(a^2 - m^2)}$$

e l'integrale generale sarà:

$$y = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax) + \frac{2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)}{(a^2 - m^2)}$$

verifichiamo derivando e sostituendo nell'equazione data:

$$y' = -C_1 a \sin(ax) + C_2 a \cos(ax) - \frac{2m \sin(mx)}{a^2 - m^2} + \frac{3m \cos(mx)}{a^2 - m^2}$$

$$y'' = -C_1 a^2 \cos(ax) - C_2 a^2 \sin(ax) - \frac{2m^2 \cos(mx)}{a^2 - m^2} - \frac{3m^2 \sin(mx)}{a^2 - m^2}$$

$$a^2 y = C_1 a^2 \cos(ax) + C_2 a^2 \sin(ax) + \frac{2a^2}{a^2 - m^2} (\cos(mx)) + \frac{3a^2}{a^2 - m^2} (\sin(mx))$$

$$y'' + a^2 y = \cos(mx) \left[\frac{2a^2 - 2m^2}{a^2 - m^2} \right] + \sin(mx) \left[\frac{3a^2 - 3m^2}{a^2 - m^2} \right]$$

$$\boxed{y'' + a^2 y = 2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)}$$

torna l'equazione data.

Notare che l'esempio ci dà già delle indicazioni per cercare l'integrale particolare.

Altro esempio

eq data: $\boxed{y'' - 7y' + 12y = x}$

abbiamo già calcolato l'omogenea associata.

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}}$$

$Q_0 = x$ è di primo grado in x

proviamo: $y_p = ax$; $y_p' = a$; $y_p'' = 0$; $-7a + 12ax = x$
(impossibile)

proviamo: $y_p = ax + b$; $y_p' = a$; $y_p'' = 0$; $\rightarrow -7a + 12ax + 12b = x$

affinché l'uguaglianza sia verificata deve essere:

$a = \frac{1}{12}$; $-\frac{7}{12} + 12b = 0$; cioè $b = \frac{7}{144}$; $\boxed{y_p = \frac{x}{12} + \frac{7}{144}}$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144}} \quad \text{(integrale generale)}$$

Quello che abbiamo visto non è il solo metodo per risolvere le equazioni differenziali complete a coefficienti costanti. Esso consiste nell'ipotizzare l'integrale particolare secondo una funzione generica del tipo o di $Q(x)$, poi derivando determinare i parametri che la definiscono sostituendo nella equazione data. Vediamo ora il:

Metodo generale per la risoluzione di una equazione differenziale completa a coefficienti costanti, o a coefficienti funzioni continue della x .

Premesso che un sistema di integrali particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea:

$$F(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

cioè: $y_1, y_2, \dots, y_n$ per i quali il Wronskiano sia diverso da zero ($W \neq 0$), cioè siano fra loro indipendenti linearmente, un tale sistema è detto: "un sistema fondamentale dell'equazione $F(y)$ " (Fuchs). L'equazione è l'omogenea associata dell'equazione data il cui secondo membro: X o $Q(x)$

è costituito da funzioni continue della x .
 Abbiamo visto che se $y_1, y_2, \dots, y_n$ è un
 sistema fondamentale dell'omogenea associata
 $F(y) = 0$ ed $\bar{y}$ è un integrale particolare,
 abbiamo che l'integrale generale è:

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + \bar{y}}$$

che abbiamo sinteticamente esportato: $(y = y_h + y_p)$;
 nel trattare equazioni lineari a coefficienti costanti.
 Sostituendo ad $F(y) = X$; $F \bar{y} = X$ (ove X è una $f(x)$)
 avremo sottraendo che $F(y - \bar{y}) = 0$ ed essendo
 $(y - \bar{y})$ soluzione dell'equazione omogenea avremo:

$$(y - \bar{y}) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

che poteva dedursi direttamente.

Il metodo, dovuto a Lagrange, per determinare un
 integrale particolare della $F(y) = X$, consiste nel
 considerare le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ come
 funzioni della x , cioè $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$;
 in modo che determinino un integrale particolare;
 cioè:

$$\bar{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \dots + c_n(x) y_n$$

derivando abbiamo:

$$\bar{y}' = [c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + \dots + c_n'(x) y_n] + [c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2' + \dots + c_n(x) y_n']$$

Poiché le derivate di costanti sono nulle, in questo caso poniamo: $-\left[C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n\right] = 0$,

(notare che è l'intera espressione posta = 0); avremo:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n'$$

e derivando avremo:

$$\bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n''$$

e considerando nulle le derivate delle C_i fino alle derivate di ordine n avremo il sistema:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0$$

$$C_2' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0$$

.....

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = \frac{X}{P_0}$$

ove le derivate erano moltiplicate ordinatamente per $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0$, semplificando si ha il sistema. Infatti: $\bar{y}$ deve verificare l'equazione

cioè: $F(\bar{y}) = X$ ed anche:

$$P_0 [C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)}] = X$$

Il sistema soprascritto costituisce un Wronskiano diverso da zero, $W \neq 0$; con Cramer, possiamo determinare le $C_i' = \frac{W_{ni} X}{P_0 W}$; ($i = 1, 2, \dots, n$)

ove W_{ni} è il complemento algebrico di $y_i^{(n-1)}$; cioè abbiamo sviluppato il determinante secondo

l'ultima riga. Risolte le c_i occorrerà integrare per trovare le $C_i = \int c_i dx = \int \frac{W_{mi} X}{P_0 W} dx$, da sostituire nell'equazione. Cioè:

$$\bar{y} = y_1 \int \frac{W_{n+1} X}{P_0 W} dx + y_2 \int \frac{W_{n+2} X}{P_0 W} dx + \dots + y_n \int \frac{W_{nn} X}{P_0 W} dx$$

Ci dà il nostro integrale particolare.

Se pensiamo che le costanti sono arbitrarie cioè possono variare ad arbitrio, nulla vieta che la variazione (arbitraria), fra le infinite possibili, si consideri funzione della x ; da ciò il metodo detto anche: "metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie"

Esempi (iniziamo con equazioni lineari a coefficienti costanti, già risolte con metodi diversi, vedi pag. prece.)

Equazione data: $y'' - 7y' + 12y = x$

omogenea associata: $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

consideriamo C_1 e C_2 funzioni della x e deriviamo

$$y' = C_1' e^{3x} + C_2' e^{4x} + 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x}$$

$$\text{poniamo: } (C_1' e^{3x} + C_2' e^{4x}) = 0$$

ricordando che all'ultima derivata non si annullano le C_i ,

derivando la:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x}$$

si ha:

$$y'' = [3C_1' e^{3x} + 4C_2' e^{4x}] + [9C_1 e^{3x} + 16C_2 e^{4x}]$$

Scriviamo il sistema: uguagliando a $\frac{X}{P}$ l'espressione

della C_i'

$$C_1' e^{3x} + C_2' e^{4x} = 0$$

$$3C_1' e^{3x} + 4C_2' e^{4x} = X$$

con Cramer:

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{7x} - 3e^{7x} = e^{7x} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ X & 4e^{4x} \end{vmatrix} = -Xe^{4x} \rightarrow C_1' = \frac{-Xe^{4x}}{e^{7x}} = -Xe^{-3x}$$

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & X \end{vmatrix} = Xe^{3x} \rightarrow C_2' = \frac{Xe^{3x}}{e^{7x}} = Xe^{-4x}$$

$$C_1 = \int C_1' dx = \int -Xe^{-3x} dx = \int \frac{X}{3} d e^{-3x} = \frac{X}{3} e^{-3x} - \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx =$$

$$\boxed{C_1 = e^{-3x} \left(\frac{X}{3} + \frac{1}{9} \right) + K_1}$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \int Xe^{-4x} dx \rightarrow \boxed{C_2 = -e^{-4x} \left(\frac{X}{4} + \frac{1}{16} \right) + K_2}$$

sostituendo nell'integrale dell'associata si ha:

$$\bar{y} = \left[e^{-3x} \left(\frac{X}{3} + \frac{1}{9} \right) + K_1 \right] e^{3x} + \left[-e^{-4x} \left(\frac{X}{4} + \frac{1}{16} \right) + K_2 \right] e^{4x}$$

$$y = K_1 e^{3x} + K_2 e^{4x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144} \quad \text{integrale generale}$$

ove: $K_1 e^{3x} + K_2 e^{4x} = y_0$ dell'omogenea associata
con K_1 e K_2 costanti arbitrarie e

$\frac{x}{12} + \frac{7}{144} = \bar{y} = y_p$ = integrale particolare
ove non figurano costanti arbitrarie

Si noti com'è stato più veloce cercarsi subito
l'integrale particolare.

Esempio:

equazione data: $y'' + a^2 y = 2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)$

integrale dell'associata: $y_0 = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$

applicando il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, si ha: (derivando y_0)

$$y_0' = [C_1' \cos(ax) + C_2' \sin(ax)] + [-a C_1 \sin(ax) + a C_2 \cos(ax)]$$

poniamo zero il primo addendo e deriviamo di nuovo:

$$y_0'' = [-a C_1' \sin(ax) + a C_2' \cos(ax)] + [-a^2 C_1 \cos(ax) - a^2 C_2 \sin(ax)]$$

si ha il sistema:

$$\begin{cases} C_1' \cos(ax) + C_2' \sin(ax) = 0 \\ -a C_1' \sin(ax) + a C_2' \cos(ax) = 2 \cos(mx) + 3 \sin(mx) \end{cases}$$

con Cramer si ha:

$$\begin{vmatrix} \cos(ax) & \sin(ax) \\ -a \sin(ax) & a \cos(ax) \end{vmatrix} = a \cos^2(ax) + a \sin^2(ax) = a$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin(ax) \\ [2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)] & a \cos(ax) \end{vmatrix} = -\sin(ax) [2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)]$$

$$C_1' = \frac{-\sin(ax)}{a} [2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)]$$

$$\begin{vmatrix} \cos(ax) & 0 \\ -a \sin(ax) & [2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)] \end{vmatrix} = \cos(ax) [2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)]$$

$$C_2' = \frac{\cos(ax)}{a} [2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)]$$

integrando C_1' e C_2' si ha:

$$C_1 = \int C_1' dx = \frac{-2}{a} \int \sin(ax) \cos(mx) dx + \frac{-3}{a} \int \sin(ax) \sin(mx) dx$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \frac{2}{a} \int \cos(ax) \cos(mx) dx + \frac{3}{a} \int \cos(ax) \sin(mx) dx$$

Per risolvere questo tipo di integrali occorre avvalersi delle formule di prostaferesi (v. Vol I) di cui riportiamo le relazioni che interessano; consideriamo: $(ax) = \left(\frac{p+q}{2}\right)$; $(mx) = \left(\frac{p-q}{2}\right)$;
 $(ax) > (mx)$: $(p) = (a+m)x$; $(q) = (a-m)x$;
 $(p) = (ax+mx)$; $(q) = (ax-mx)$;

Nelle formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} (\sin(p) + \sin(q)) \\ \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} (\cos(q) - \cos(p)) \\ \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} (\cos(p) + \cos(q)) \\ \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} (\sin(p) - \sin(q)) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{per } C_1 \\ \\ \text{per } C_2 \end{array}$$

sostituiamo i valori:

$$\begin{aligned} \sin(ax) \cos(mx) &= \frac{1}{2} (\sin(ax+mx) + \sin(ax-mx)) \\ \sin(ax) \sin(mx) &= \frac{1}{2} (\cos(ax-mx) - \cos(ax+mx)) \\ \cos(ax) \cos(mx) &= \frac{1}{2} (\cos(ax+mx) + \cos(ax-mx)) \\ \cos(ax) \sin(mx) &= \frac{1}{2} (\sin(ax+mx) - \sin(ax-mx)) \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{-3}{2a} \int (\sin(ax+mx) + \sin(ax-mx)) dx + \frac{-3}{2a} \int (\cos(ax-mx) - \cos(ax+mx)) dx$$

$$C_2 = \frac{3}{2a} \int (\cos(ax+mx) + \cos(ax-mx)) dx + \frac{3}{2a} \int (\sin(ax+mx) - \sin(ax-mx)) dx$$

$$C_1 = \frac{-3}{a} \left(\frac{-\cos(ax+mx)}{(a+m)} + \frac{-\cos(ax-mx)}{(a-m)} \right) - \frac{3}{2a} \left(\frac{\sin(ax-mx)}{(a-m)} - \frac{\sin(ax+mx)}{(a+m)} \right) + K_1$$

$$C_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\sin(ax+mx)}{(a+m)} + \frac{\sin(ax-mx)}{(a-m)} \right) + \frac{3}{2a} \left(\frac{-\cos(ax+mx)}{(a+m)} - \frac{-\cos(ax-mx)}{(a-m)} \right) + K_2$$

riduciamo allo stesso denominatore:

$$\begin{aligned}\frac{(a-m)}{a} [\cos(ax+mx)] &= \frac{(\cos(ax) \cos(mx) - \cancel{\sin(ax)} \cancel{\sin(mx)})}{a} \\ &\quad - \frac{m}{a} (\cancel{\cos(ax)} \cos(mx)) + \frac{m}{a} (\cancel{\sin(ax)} \sin(mx)) \\ \frac{(a+m)}{a} [\cos(ax-mx)] &= \frac{(\cos(ax) \cos(mx) + \cancel{\sin(ax)} \cancel{\sin(mx)})}{a} \\ &\quad + \frac{m}{a} (\cancel{\cos(ax)} \cos(mx)) + \frac{m}{a} (\cancel{\sin(ax)} \sin(mx))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{3(a+m)}{2a} [\sin(ax-mx)] &= -\frac{3}{2} (\cancel{\sin(ax)} \cos(mx)) + \frac{3}{2} (\cos(ax) \cancel{\sin(mx)}) \\ &\quad - \frac{m}{2a} (\cancel{\sin(ax)} \cos(mx)) + \frac{m}{2a} (\cancel{\cos(ax)} \sin(mx))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \frac{(a-m)}{a} [\sin(ax+mx)] &= \frac{3}{2} (\cancel{\sin(ax)} \cos(mx)) + \frac{3}{2} (\cos(ax) \cancel{\sin(mx)}) \\ &\quad - \frac{m}{2a} (\cancel{\sin(ax)} \cos(mx)) - \frac{m}{2a} (\cancel{\cos(ax)} \sin(mx))\end{aligned}$$

$$C_1 = \left[2 \cos(ax) \cos(mx) + 2 \frac{m}{a} \sin(ax) \sin(mx) + 3 \cos(ax) \sin(mx) - \right. \\ \left. - 3 \frac{m}{a} \sin(ax) \cos(mx) \right] \frac{1}{(a^2 - m^2)^{1/2}} + K$$

$$C_1 = \frac{\cos(ax) (2 \cos(mx) + 3 \sin(mx)) + \frac{m}{a} \sin(ax) (2 \sin(mx) - 3 \cos(mx))}{(a^2 - m^2)^{1/2}} + K$$

$$\begin{aligned}\frac{(a-m)}{a} [\sin(ax+mx)] &= \frac{\sin(ax) \cos(mx) + \cancel{\cos(ax)} \cancel{\sin(mx)}}{a} \\ &\quad - \frac{m}{a} \cancel{\sin(ax)} \cos(mx) - \frac{m}{a} \cancel{\cos(ax)} \sin(mx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(a+m)}{a} [\sin(ax-mx)] &= \frac{\sin(ax) \cos(mx) - \cancel{\cos(ax)} \cancel{\sin(mx)}}{a} \\ &\quad + \frac{m}{a} \cancel{\sin(ax)} \cos(mx) - \frac{m}{a} \cancel{\cos(ax)} \sin(mx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{3(a-m)}{2a} [-\cos(ax+mx)] &= -\frac{3}{2} \cancel{\cos(ax)} \cos(mx) + \frac{3}{2} \sin(ax) \sin(mx) \\ &\quad + \frac{3m}{2a} \cancel{\cos(ax)} \cos(mx) - \frac{3m}{2a} \cancel{\sin(ax)} \sin(mx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \frac{(a+m)}{a} [+ \cos(ax-mx)] &= \frac{3}{2} \cancel{\cos(ax)} \cos(mx) + \frac{3}{2} \sin(ax) \sin(mx) \\ &\quad + \frac{3m}{2a} \cancel{\cos(ax)} \cos(mx) + \frac{3m}{2a} \cancel{\sin(ax)} \sin(mx)\end{aligned}$$

$$C_2 = \left[2 \operatorname{sen}(ax) \cos(mx) - \frac{2m}{a} \cos(ax) \operatorname{sen}(mx) + 3 \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(mx) - \frac{3m}{a} \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(mx) \right] \frac{1}{(a^2 - m^2)} + K_2$$

$$C_2 = \frac{\operatorname{sen}(ax) (2 \cos(mx) + 3 \operatorname{sen}(mx)) - \frac{m}{a} \cos(ax) (2 \operatorname{sen}(mx) - 3 \cos(mx))}{(a^2 - m^2)} + K_2$$

sostituendo C_1 e C_2 nell'integrale dell'associata: $y_0 = C_1 \cos(ax) + C_2 \operatorname{sen}(ax)$; si ha:

$$\begin{aligned} & \cos^2(ax) \left(\frac{2 \cos(mx) + 3 \operatorname{sen}(mx)}{(a^2 - m^2)} \right) + \frac{m}{a} \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) \left(\frac{2 \operatorname{sen}(mx) - 3 \cos(mx)}{a^2 - m^2} \right) + \\ & + K_1 \cos(ax) + \operatorname{sen}^2(ax) \left(\frac{2 \cos(mx) + 3 \operatorname{sen}(mx)}{(a^2 - m^2)} \right) - \\ & - \frac{m}{a} \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) \left(\frac{2 \operatorname{sen}(mx) - 3 \cos(mx)}{(a^2 - m^2)} \right) + K_2 \operatorname{sen}(ax) \end{aligned}$$

cioè:

$$y = K_1 \cos(ax) + K_2 \operatorname{sen}(ax) + \left(\frac{2 \cos(mx) + 3 \operatorname{sen}(mx)}{(a^2 - m^2)} \right)$$

risultato che avevamo già ottenuto con altro metodo (vedi pag 490), e che abbiamo già verificato.

La lungaggine e la complessità di questo procedimento può implicare errori di calcolo, per questo abbiamo sviluppato nei particolari le singole parti ed evidenziato le semplificazioni.

Riepilogo di integrali di equazioni omogenee

equazione data	integrale
$y' \pm ay = 0$	$y = C e^{\pm ax}$
$y' + P(x)y = 0$	$y = C e^{-\int P(x) dx}$
$y' + P(x)y = Q(x)$	$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{+\int P(x) dx} dx + C \right)$
$y'' - \mu^2 y = 0$	$y = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x) = y = K_1 \cosh(\mu x + K_2)$
$y'' + \mu^2 y = 0$	$y = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x) = y = K_1 \cos(\mu x + K_2)$
$y^{(n)} - f(x) = 0$	$y = \left[\left(\int f(x) dx \right) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n \right]$
nel caso in cui l'eq. caratteristica si riduca: $(z-\alpha)^n = 0$ (radici multiple	$y = e^{\alpha x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1})$
se le radici del l'equaz. caratter. sono: $(p \pm iq)$	$y = e^{px} (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx))$

Altri esempi

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = e^{-3x}} \quad (\text{equaz. data})$$

radici dell'omogenea associata $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (\text{integrale dell'associata.})$$

(Con Liouville) supponiamo: $y_p = a e^{-bx}$ per ora con a e b costanti (potrebbero essere funzioni della x)

$$y'_p = -ab e^{-bx}; \quad y''_p = +ab^2 e^{-bx}; \quad \text{sostituendo nella}$$
$$\text{eq. data: } ae^{-bx}(b^2 + 3b + 2) = e^{-3x}$$

$$\text{per } b = +3; \quad a(9 + 9 + 2) = 1 \quad \text{quindi } a = \frac{1}{20}$$

$$y_p = \frac{e^{-3x}}{20}$$

$$y = (y_0 + y_p)$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{e^{-3x}}{20}} \quad \text{integrale generale}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{infatti: } -3y' &= -3(C_1 e^x - 6C_2 e^x + \frac{9}{20} e^{-3x}) \\ y'' &= C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + \frac{9}{20} e^{-3x} \\ \text{e } y &= 2C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + \frac{2}{20} e^{-3x} \end{aligned} \right\} \text{sommando:}$$
$$\underline{y'' - 3y' + 2y = \frac{20}{20} e^{-3x}}$$

Col metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 & C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = e^{-3x} & C_1' e^x + 4C_2' e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{risolvendo il sistema: } \boxed{C_1' = -e^{-4x}}; \quad \boxed{C_2' = e^{-5x}}$$

$$\text{integrando: } \boxed{C_1 = \frac{1}{4} e^{-4x} + K_1}; \quad \boxed{C_2 = \frac{1}{5} e^{-5x} + K_2}$$

sostituendo nell'integrale dell'omogenea associata abbiamo:

$$y = K_1 e^x + K_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-4x} \cdot e^x - \frac{1}{5} e^{-5x} \cdot e^{2x}$$

$$\boxed{y = K_1 e^x + K_2 e^{2x} + \frac{e^{-3x}}{20}}$$

Risoluzione identica alla precedente ove K_1 e K_2 tengono il posto di C_1 e C_2 (costanti arbitrarie)

Vediamo ora un esempio simile al precedente ove però, con Liouville, "a" e "b" dobbiamo considerarli funzioni della x .

$$\boxed{y'' - 2y' + y = e^x} \quad (\text{equaz. data})$$

$$\boxed{y_0 = e^x (C_1 + C_2 x)} \quad (\text{integrale dell'associata})$$

con Liouville, dobbiamo considerare un integrale particolare del tipo: $a e^{bx} = y_p$, ma in questo caso non possiamo considerare "a" e "b" costanti perché porterebbero ad un assurdo.

Consideriamo quindi: $y_p = f(x) \cdot e^{\varphi(x)}$;

$$y_p' = f'(x) e^{\varphi(x)} + f(x) \varphi'(x) e^{\varphi(x)}; \quad y_p'' = f''(x) e^{\varphi(x)} + \frac{f'(x) \varphi'(x)}{f(x) \varphi'(x)} e^{\varphi(x)} +$$

$$f'(x) \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + f(x) \varphi''(x) e^{\varphi(x)} + f(x) \varphi'^2 e^{\varphi(x)}.$$

mettendo in evidenza $e^{f(x)}$ e sostituendo nella equazione data si ha:

$$\left[f''(x) + 2f'(x)f'(x) + f(x)f''(x) + f(x)f'(x)^2 \right] - 2\left[f'(x) + f(x)f'(x) \right] + f(x) e^{f(x)} = e^x$$

per cui: $f(x) = x$ e quindi: $f'(x) = 1$; $f''(x) = 0$

$$\cancel{f''(x)} + 2\cancel{f'(x)} + \cancel{f(x)} - 2\cancel{f'(x)} - 2\cancel{f(x)} + \cancel{f(x)} = 1 \quad \text{cioè:}$$

$$f''(x) = 1 \quad \text{da cui:} \quad f'(x) = x \quad ; \quad \text{ed} \quad f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\bar{y} = y_p = \frac{x^2}{2} e^x$$

$$\boxed{y = e^x \left(C_1 + xC_2 + \frac{x^2}{2} \right)} \quad \text{integrale generale}$$

$$y' = e^x \left(C_1 + xC_2 + \frac{x^2}{2} \right) + e^x (C_2 + x)$$

$$y'' = e^x \left(C_1 + xC_2 + \frac{x^2}{2} \right) + 2e^x (C_2 + x) + e^x$$

sostituendo nell'equazione data:

$$\begin{aligned} y'' &= e^x \left(C_1 + \cancel{2C_2} + \cancel{xC_2} + \cancel{2x} + \frac{x^2}{2} + 1 \right) \\ -2y' &= e^x \left(\cancel{-2C_1} - \cancel{2C_2} - \cancel{2xC_2} - \cancel{2x} - \frac{\cancel{2x^2}}{2} \right) \\ +y &= e^x \left(C_1 - \quad + xC_2 - \quad + \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

torna l'eq. data.

Applicando il metodo generale di Lagrange o

delle variazioni delle costanti arbitrarie si ha:
derivando $y_0 = (C_1 + xC_2)e^x$

$$y'_0 = (C'_1 + C_2 + xC'_2)e^x + (C_1 + xC_2)e^x$$

$$y'_0 = \underbrace{C'_1 e^x + xC'_2 e^x}_{=0} + C_1 e^x + C_2 e^x + xC_2 e^x$$

$$y''_0 = (C'_1 + C'_2 + C_2 + xC'_2 + C_1 + C_2 + xC_2) e^x$$

si ha il sistema:

$$\begin{cases} (C'_1 + xC'_2) = 0 \\ \text{dividendo per } e^x: (C'_1 + (x+1)C'_2) = 1 \end{cases}$$

$$\text{da cui: } C'_1 = -x \quad ; \quad C'_2 = 1$$

integrando:

$$C_1 = \left(-\frac{x^2}{2} + K_1\right) \quad ; \quad C_2 = (x + K_2)$$

e sostituendo nell'integrale dell'associata:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x \quad \text{si ha:}$$

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} + K_1 + (x + K_2)x\right)e^x$$

$$\boxed{y = \left(K_1 + K_2 x + \frac{x^2}{2}\right)e^x}$$

che torna l'integrale generale.

Criteri ed artifici vari

Abbassamento dell'ordine dell'eq. diff.

Qualora una equazione differenziale manchi della y o anche della y e della y' , o in generale delle derivate al di sotto di un certo ordine è possibile, operando un cambiamento di variabile, abbassare l'ordine dell'equazione data.

Esempio:

$$\boxed{y''' + P(x)y'' = Q(x)} \quad \text{equaz. data}$$

considero: $\left. \begin{array}{l} t'' = y''' \\ t' = y'' \\ t = y' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{abbasso di un} \\ \text{grado di derivazione} \\ \text{l'equazione} \end{array}$

e l'equazione diventa:

$$t'' - t' = Q(x)$$

considero: $\left. \begin{array}{l} z' = t'' \\ z = t' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{abbasso ancora} \\ \text{di un grado di de-} \\ \text{rivazione} \end{array}$

e l'equazione diventa: $z' + P(x)z = Q(x)$

$$z = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{+\int P(x) dx} dx + C_1 \right) = t'$$

e quindi: $t = \int t' dx = y'' + C_2$; $\int t dx = \int y' dx = y + C_2$

Esempio numerico

$$\boxed{y''' - 5y'' = e^{6x}} \quad \text{eq. data}$$

$$t'' - 5t' = e^{6x} \quad \text{in ordine in meno}$$

$$z' - 5z = e^{6x}$$

$$z = e^{+5\int dx} \left(\int e^{6x} \cdot e^{-5\int dx} dx + C_1 \right)$$

$$= e^{5x} \left[\int e^{6x} e^{-5x} dx + C_1 \right]$$

$$= e^{5x} \left[\int e^x dx + C_1 \right]$$

$$= e^{5x} (e^x + C_1)$$

$$= (e^{6x} + C_1 e^{5x}) = t'$$

$$t = \int (e^{6x} + C_1 e^{5x}) dx = \frac{1}{6} e^{6x} + \frac{C_1}{5} e^{5x} + C_2 = y'$$

$$y = \int \left(\frac{e^{6x}}{6} + \frac{C_1}{5} e^{5x} + C_2 \right) dx = \boxed{\frac{e^{6x}}{36} + \frac{C_1 e^{5x}}{25} + C_2 x + C_3}$$

$$y' = \frac{e^{6x}}{6} + \frac{C_1 e^{5x}}{5} + C_2$$

$$\left. \begin{aligned} 5y'' &= 5e^{6x} + 5e^{5x} \\ y''' &= 6e^{6x} + 5e^{5x} \end{aligned} \right\} y''' - 5y'' = e^{6x} \quad (\text{forma})$$